



Cohomologie de Floer, hyperbolicités symplectique et pseudocomplexe.

Anne-Laure Biolley

► To cite this version:

Anne-Laure Biolley. Cohomologie de Floer, hyperbolicités symplectique et pseudocomplexe.. Mathématiques [math]. Ecole Polytechnique X, 2008. Français. NNT : . pastel-00000702

HAL Id: pastel-00000702

<https://pastel.archives-ouvertes.fr/pastel-00000702>

Submitted on 21 Jul 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE de DOCTORAT de l'ÉCOLE
POLYTECHNIQUE

Spécialité : MATHÉMATIQUES

présentée par

Anne-Laure BIOLLEY

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Sujet de la thèse :

Cohomologie de Floer, hyperbolicités symplectique et pseudo-complexe

soutenue le 19 décembre 2003 devant le jury composé de :

M. Etienne GHYS	Examineur
M. Emmanuel GIROUX	Examineur
M. Paul SEIDEL	Rapporteur
M. Jean-Claude SIKORAV	Rapporteur
M. Nessim SIBONY	Examineur
M. Claude VITERBO	Directeur de thèse

Remerciements

Au moment de conclure ma thèse, je remercie naturellement en premier lieu Claude Viterbo qui a été mon directeur au cours de ces trois années. C'est grâce à lui que j'ai découvert les domaines de la géométrie symplectique et de la géométrie pseudo-complexe, et il a suscité mon intérêt pour les questions d'hyperbolicité.

Je tiens également à remercier tout particulièrement mes deux rapporteurs, Paul Seidel et Jean-Claude Sikorav, d'avoir pris le temps de relire ma thèse. Leurs remarques, leurs conseils constructifs, et leur soutien lors de ma dernière année de thèse, m'ont été très utiles, et je leur en suis très reconnaissante.

Qui plus est, je les remercie très sincèrement, ainsi que tous les autres membres du jury, de m'avoir fait l'honneur de venir à ma soutenance !

Par ailleurs, à toute la sympathique équipe du CMAT dans l'ambiance de laquelle travailler fut un plaisir,

Et en particulier Michèle et Claudine, pour leur aide précieuse, leur gentillesse et leur sourire,

A tous mes amis de Paris et d'ailleurs dont il est toujours agréables de se sentir entourés,

Je n'en nommerai que certains mais les autres, qui se reconnaîtront, sont également présents dans mes pensées,

A Alex, Ivan et Denis pour leurs agréables compagnies, pour leur soutien, et pour toutes les conversations partagées,

A Chi-Tuong pour tout ce qu'il m'a appris et apporté, à Mary toujours là pour moi à chaque fois que je l'ai sollicitée,

A Loïc et Séverine, Magali et Jean-Baptiste, et toute la famille Livine pour leur amicale et généreuse hospitalité,

"To the geometry of Parmenar, to my friends Journeymen to the Southeast" que je ne saurai oublier,

A Etera dont les encouragements constants et les conseils m'ont aidé à progresser, et pour tous les moments heureux partagés,

Et bien-sûr à ma famille dont le soutien formidable et la bonne humeur m'ont toujours accompagnée,

Je présente mes remerciements et mes plus amicales pensées !

Table des matières

1	Introduction	9
1.1	Rappels de géométrie symplectique et pseudo-complexe	18
1.2	Convexité symplectique et pseudo-complexe	19
I	Etude de l'hyperbolicité symplectique et complexe	23
2	Cadre symplectique	25
2.1	Cohomologie de Floer	25
2.1.1	Construction de \tilde{M}	27
2.1.2	Hamiltoniens adaptés	28
2.1.3	Cohomologie de Floer	28
2.2	Hyperbolicité symplectique et capacité	33
2.2.1	Hyperbolicité symplectique des variétés compactes à bord de type contact	34
2.2.2	Homologie de Floer de variétés ouvertes et hyperbolicité symplectique forte	35
2.2.3	Capacité symplectique naturellement associée	36
2.2.4	Estimation de la capacité dans le cas des variétés de Stein	38
2.2.5	Symplectique hyperbolicité	41
2.2.6	Capacité symplectique et courbure	43
2.2.7	Variétés produits et variétés fibrés	45
3	Cadre pseudo-complexe	49
3.1	Hyperbolicités pseudo-complexes	50
3.1.1	Variétés complexes hyperboliques au sens de Kobayashi	50
3.1.2	Brody-hyperbolicité et lemme de Brody	52
3.1.3	Application : stabilité de l'hyperbolicité	54
3.1.4	Dans ce cadre, la pseudo-Kähler hyperbolicité	54
3.2	Un invariant pseudo-Kähler : τ	58
3.2.1	Brève introduction à la théorie de Nevanlinna	58
3.2.2	Définition et propriétés de τ	61
3.2.3	Lien entre les disques pseudo-holomorphes et les hyperbolicités complexes	62
3.2.4	Capacité pseudo-Kähler	64

II	Interface entre hyperbolicité symplectique et pseudo-complexe	67
4	Premiers liens entre hyperbolicité symplectique et complexe	69
4.1	Construction de disques pseudo-holomorphes	69
4.1.1	Construction d'une suite d'Hamiltoniens adaptés	69
4.1.2	Disques pseudo-holomorphes	71
4.2	Hyperbolicité complexe \Rightarrow Hyperbolicité symplectique	73
4.2.1	Théorèmes de base	73
4.2.2	Applications aux variétés $M = W \setminus H$	76
4.2.3	Application : hyperbolicité et courbure	77
5	Approfondissement et application à la stabilité de la non-hyperbolicité	79
5.1	Résultats de stabilité	80
5.1.1	Théorèmes principaux	80
5.1.2	Applications et exemples	83
5.1.3	Variétés-produit	85
5.2	Outils de calcul variationnel	87
5.2.1	Rappels des notions et définitions	87
5.2.2	Principaux résultats	89
5.3	Étude générale de la stabilité	93
5.3.1	Preuve des théorèmes 5.1.1, 5.1.3 et 5.1.4	93
5.3.2	Preuve des corollaires 5.1.1 et 5.1.2	96
5.3.3	Preuve de la proposition 5.1.2 et ses corollaires	98
5.3.4	Preuve des résultats sur les variétés-produits de 5.1.3	104
III	Structures feuilletées paraboliques	105
6	Introduction et motivation de l'étude	107
6.1	Mesure hyperbolicité	107
6.2	Des courbes entières aux structures paraboliques feuilletées	108
7	Variété complexe feuilletée paraboliquement	111
7.1	Etude générale	112
7.1.1	Construction de \mathcal{C}	112
7.1.2	Etude de l'holomorphie de $F \in \mathcal{C}$	113
7.1.3	Modification sous variation de F	114
7.2	Construction d'invariants du feuilletage	116
7.2.1	Constructions de formes différentielles	116
7.2.2	Perturbations par passage de F à \tilde{F}	117
7.2.3	Connections sur $T\mathcal{F}$	118
7.2.4	Tenseur invariant Γ	119
7.2.5	Cas de dimension supérieure	120
7.2.6	Cas d'un feuilletage dont toutes les feuilles sont compactes	120
7.3	Un exemple avec $\omega \neq 0$	122

TABLE DES MATIÈRES

7

IV Conclusion et ouvertures

125

Chapitre 1

Introduction

Les variétés symplectiques sont le cadre naturel de la mécanique (Hamiltonnienne) classique et de la mécanique quantique. Elles peuvent être munies de structures pseudo-complexes, qui sont la généralisation des structures complexes (une structure pseudo-complexe sur une variété est une vraie structure complexe si elle est intégrable). On dit qu'une structure symplectique et une structure pseudo-complexe sur une même variété sont compatibles si elles déterminent une métrique Riemannienne, métrique qui sera alors appelée pseudo-Kähler. Or une variété symplectique peut toujours être munie d'une structure pseudo-complexe compatible et on sait même [21] que l'ensemble des structures pseudo-complexes compatibles à une structure symplectique fixée est un ensemble non vide contractile. Il est naturel, quand une variété M^{2n} est munie d'une structure symplectique ω et d'une structure pseudo-complexe J compatibles, de s'intéresser aux liens entre les propriétés de la variété pseudo-complexe (M, J) et les propriétés de la variété symplectique (M, ω) . L'étude de cette vaste question devrait permettre (et a d'ailleurs déjà permis) d'obtenir de nombreuses avancées à la fois dans le domaine symplectique et dans le domaine pseudo-complexe.

D'ores et déjà, rappelons qu'en présence d'une structure pseudo-complexe on peut définir les courbes pseudo-holomorphes généralisant la notion de courbes holomorphes. Leur introduction par Gromov [21] en géométrie symplectique a permis de faire de considérables progrès et reste un outil puissant dans ce domaine.

L'objectif de ma thèse a été de répondre partiellement à cette vaste question des liens entre les propriétés symplectiques et pseudo-complexes (et ce en utilisant notamment comme outil et liaison naturelle les courbes pseudo-holomorphes). Plus précisément, je me suis intéressée aux notions d'hyperbolicités : j'ai étudié les liens entre d'un côté les propriétés de la cohomologie de Floer associée à une variété symplectique et l'hyperbolicité symplectique associée, et de l'autre les propriétés d'hyperbolicités pseudo-complexes (généralisation immédiate de l'hyperbolicité complexe au cas pseudo-complexe). L'étude de cette interface fournit une nouvelle approche et éclaire d'une nouvelle lumière ces deux domaines.

Du côté symplectique, notamment inspirée de cette notion de courbes pseudo-holomorphes, la **cohomologie de Floer** [13] [14], notée $FH^*(M)$, est un invariant symplectique au coeur de nombreuses recherches actuelles (en géométrie symplectique mais aussi en dynamique Hamiltonienne et en mathématiques-physiques). Cette notion utilise des techniques variationnelles et la théorie de Fredholm afin de généraliser la théorie de Morse au cas des fonctionnelles sur un espace de dimension infinie. Elle permet ainsi de définir une cohomologie engendrée par les orbites périodiques d'un Hamiltonien H sur la variété, ces orbites étant vues comme les points critiques de la

fonctionnelle d'action \mathcal{A}_H . Le cobordisme est lui défini en comptant les trajectoires de gradient de cette fonctionnelle d'action, que l'on appelle trajectoires de Floer. Dans le cas de variétés fermées, il a été montré que d'un part ces groupes de cohomologie ne dépendent pas du choix de l'Hamiltonien et définissent un invariant symplectique, la cohomologie de Floer ; d'autre part que celle-ci est isomorphe à la cohomologie usuelle de la variété. Cela a permis de répondre à la conjecture d'Arnold sur le problème de la minoration du nombre d'orbites 1-périodiques d'un Hamiltonien quelconque sur une variété fermée.

On peut également définir la cohomologie de Floer de variétés compactes à bord de type contact (qui présentent les mêmes propriétés de compacité nécessaires pour une définition correcte que les variétés fermées). Cela a notamment été réalisé par Viterbo dans [39], et c'est cette définition que nous adopterons, mais on peut également regarder [16] pour une définition dans le cas des ouverts de \mathbb{C}^n , ou [6] pour une définition alternative, ou [5] pour l'approche la plus récente. L'idée derrière cette version ([39]) de la cohomologie de Floer est notamment de répondre à la conjecture de Weinstein sur la question de l'existence d'orbite périodique sur un niveau d'énergie fixé. Notons que cette question ne dépend pas de l'Hamiltonien mais seulement de la géométrie de l'hypersurface ! Ainsi la conjecture de Weinstein peut se lire comme l'existence d'orbites de Reeb sur une hypersurface de type contact. Dans le cas de variétés compactes à bord de type contact, la cohomologie de Floer est construite à partir d'une suite d'Hamiltoniens adaptés (pour lesquels ∂M est un niveau d'énergie). Intuitivement, elle est engendrée d'une part par les "orbites constantes" à l'intérieur de M (dont l'action est proche de zéro et qui correspondent aux points critiques d'une fonction de Morse sur M), et d'autre part par les orbites de Reeb du bord de la variété (dont l'action est égale à la période de l'orbite de Reeb et est donc strictement positive). Elle n'est donc en général pas isomorphe à la cohomologie usuelle de la variété. Toutefois, (les orbites constantes engendrant le complexe de Morse de la variété), on montre qu'il existe un morphisme entre la cohomologie de Floer et la cohomologie usuelle de la variété modulo son bord :

$$c_M^* : FH^*(M) \rightarrow FH^*(M, \partial M)$$

Intuitivement, ce morphisme est obtenu en ne conservant que les orbites dont l'action est proche de zéro.

Etant donné le résultat pour les variétés fermées, se pose naturellement la question de la comparaison entre la cohomologie de Floer et la cohomologie usuelle : ce morphisme c_M^* est-il ou pas un isomorphisme ? Que fait défaut à c_M^* pour être un isomorphisme, c'est-à-dire, que fait défaut à la cohomologie de Floer $FH^*(M)$ pour être un invariant purement topologique, ou encore quelles sont les informations symplectiques (non topologiques) que contient la cohomologie de Floer ? Notons qu'ainsi dès lors que c_M^* n'est pas un isomorphisme, la cohomologie de Floer devient un invariant symplectique non topologique, et donc particulièrement intéressant pour l'étude de la géométrie symplectique. Dans ce cas-là, l'une des premières informations symplectiques contenues dans $FH^*(M)$ est l'existence d'une orbite de Reeb sur le niveau d'énergie ∂M ; Viterbo [39] a donc introduit cette propriété de non isomorphisme sous le nom de "Algebraic Weinstein Conjecture".

Cette question est la base de ma définition de l'hyperbolicité symplectique : dans le cas de variétés compactes à bord de type contact, on dit que la variété est **symplectique hyperbolique** si ce morphisme c_M^* est surjectif.

On peut naturellement associer à la cohomologie de Floer une **capacité symplectique** qui mesure la non-hyperbolicité symplectique de la variété : une variété compacte à bord de type

contact est symplectique hyperbolique si et seulement si sa capacité est infinie. Plus précisément, en ne prenant en compte que les orbites d'action plus petite que $\mu > 0$ on peut construire des cohomologies de Floer tronquées $FH^*(M, \mu)$. Et, les orbites constantes étant d'action "presque nulles", on peut factoriser le morphisme c_M^* à travers un morphisme

$$c_\mu^* : FH^*(M) \begin{array}{c} \xrightarrow{c_M^*} H^{*+n}(M, \partial M) \\ \searrow \quad \nearrow c_\mu^* \\ FH^n(M, \mu) \end{array} \text{ (intuitivement en ne conservant)}$$

d'abord que les orbites d'action inférieure à μ , puis avec c_μ^* , que celles d'action proche de 0). Notons que pour μ très petit c_μ^* est l'identité est donc un isomorphisme. On peut donc associer à chaque variété symplectique compacte à bord de type contact :

$$\mu(M, \omega) = \inf\{\mu, c_\mu^n \text{ n'est pas surjectif}\},$$

et on vérifie que cette quantité définit bien une capacité. Et intuitivement, plus cette capacité est grande, plus la variété est symplectique hyperbolique.

Cette notion de capacité m'a permis de généraliser la notion d'hyperbolicité symplectique à des variétés symplectiques plus générales. Celle-ci provenant de l'étude de la cohomologie de Floer des variétés compactes à bord de type contact, le cadre naturel pour son extension est celui des variétés ouvertes ω -convexes à l'infini, qui s'écrivent comme l'union croissante de tels domaines compacts. Pour une telle variété, on définit l'hyperbolicité symplectique à partir de la croissance des capacités de ces domaines compacts : elle est dite **symplectique hyperbolique** si la suite des capacités des domaines compacts de la variété (qui est une suite croissante) croît "suffisamment vite". Et on dit qu'elle est fortement symplectique hyperbolique si cette suite est stationnaire égale à l'infini.

Alors que la définition d'hyperbolicité symplectique forte est elle complètement intrinsèque, notons que dans le cas des variétés ouvertes, bien qu'elle soit qualitativement claire, d'un point de vue quantitatif, la notion d'hyperbolicité symplectique est elle reliée au choix de la quantité à laquelle on choisit de comparer la capacité (cela peut être rapproché de l'existence de plusieurs définitions différentes d'hyperbolicités complexes).

Enfin, on peut naturellement étendre notre définition au cas de variétés fermées M dont le revêtement universel \widetilde{M} est ω -convexe (on les appellera ω -convexes elles-mêmes) : on dit qu'une telle variété M est symplectique hyperbolique si son revêtement universel l'est. Cette idée est naturelle et est similaire à celles des définitions de Kähler-hyperbolicité par Gromov [21] ou d'hyperbolicité symplectique par Polterovich [35] qui, elles aussi, sont définies à partir des propriétés du revêtement universel.

Le cadre symplectique d'étude de notre thèse sera celui où les notions de cohomologie de Floer et d'hyperbolicité symplectique sont bien définies, c'est-à-dire celui des variétés symplectiques ω -convexes.

D'un autre côté, les notions (très connues et étudiées) d'hyperbolicités complexes, basées sur l'existence de courbes holomorphes, se généralisent immédiatement au cadre pseudo-complexe. Il existe différentes définitions non équivalentes, mais qui sont en fait toutes équivalentes sous certaines hypothèses de compacité. Cette notion d'hyperbolicité complexe correspond intuitivement à la non-existence de courbes entières (pseudo)-holomorphes. En fait plus précisément l'une de ses définitions est : une variété pseudo-complexe est Brody-hyperbolique si les seules applications

pseudo-holomorphes du plan complexe dans la variété sont les constantes.

Cette question de l'hyperbolicité pseudo-complexe n'a encore été que très peu abordée mais devrait permettre de voir sous un autre angle les nombreuses questions encore ouvertes d'hyperbolicité complexe ([29]). L'un des premiers articles étudiant cette question et surtout l'abordant d'un point de vue symplectique, est celui de Bangert [3] qui prouve :

Théorème 1.0.1 (Bangert) *Si $(\mathbb{T}^{2n}, \omega)$ est un tore standard (i.e. quotient de \mathbb{R}^{2n} muni de sa structure symplectique standard). Alors, pour toute structure pseudo-complexe J compatible avec ω , (\mathbb{T}^{2n}, J) n'est pas Brody hyperbolique.*

La non-hyperbolicité complexe du tore est bien-sûr connue pour la structure complexe standard mais ce théorème nous dit que c'est encore le cas pour n'importe quelle autre structure pseudo-complexe compatible avec la structure symplectique standard. Ce résultat est particulièrement intéressant car, bien que habituellement la propriété de non-hyperbolicité complexe ne soit pas stable par déformation (même C^∞) (l'hyperbolicité complexe est une propriété ouverte), il nous dit que dès lors que l'on se restreint à l'ensemble des structures pseudo-complexes compatibles à cette structure symplectique standard sur le tore, la non-hyperbolicité complexe est stable.

L'un des objectifs initiaux de ma thèse était de généraliser ce théorème à d'autres variétés symplectiques, et ce à travers une approche symplectique des questions d'hyperbolicités pseudo-complexes. Pour cela, j'ai donc étudié les liens entre les propriétés d'hyperbolicité symplectique et celles d'hyperbolicité pseudo-complexes lorsqu'une variété est munie à la fois d'une structure symplectique et d'une structure pseudo-complexe compatibles, et ce en utilisant comme lien naturel les courbes pseudo-holomorphes. J'ai également défini une nouvelle notion d'hyperbolicité complexe, définie pour les variétés symplectiques munies d'une structure pseudo-complexe compatible (à partir de la dérivée des disques pseudo-complexes), qui dépend en fait à la fois de la structure pseudo-complexe et de la métrique pseudo-Kähler mais s'avère être équivalente à toutes les autres notions d'hyperbolicités complexes sous les hypothèses habituelles de compacité. Cette notion, appelée **hyperbolicité pseudo-Kähler**, apparaîtra, avec les courbes pseudo-holomorphes, comme le lien naturel entre l'hyperbolicité symplectique et l'hyperbolicité pseudo-complexe. Grâce à cette étude je souhaitais notamment obtenir une généralisation du théorème de Bangert mais aussi mieux comprendre la structure de la cohomologie de Floer et voir sous un autre jour les questions d'hyperbolicité complexe. Comme je prouverai que, sous certaines hypothèses, l'hyperbolicité pseudo-complexe implique l'hyperbolicité symplectique, les variétés non-symplectique-hyperboliques apparaîtront comme le cadre naturel pour la généralisation du théorème de Bangert : en effet, sous certaines hypothèses, une variété non-symplectique-hyperbolique est non-complexe-hyperbolique pour tout structure pseudo-complexe compatible.

Les principaux résultats de cette thèse sur cette question consistent, dans un premier temps, à faire le lien entre l'hyperbolicité symplectique et les courbes pseudo-holomorphes grâce à un théorème montrant que la non hyperbolicité symplectique implique l'existence de disques pseudo-holomorphes :

Théorème 1.0.2 *Soit (M, ω, J) une variété symplectique, à bord de type contact. Si M est non symplectique hyperbolique et si J est une structure pseudo-complexe compatible préservant les hyperplans de contact de ∂M (et donc ∂M est J -convexe), alors il existe $v : \mathbb{D} \rightarrow M$ d'aire inférieure à la capacité de M $\mu(M)$ et telle que $v(\partial\mathbb{D}) \subset \partial M$ (et $f(0) = x_0$ où x_0 est un point quelconque fixé).*

J'utilise ensuite ce résultat et des outils d'analyse complexe, pour montrer que la **non hyperbolicité symplectique d'une variété ω -convexe implique la non-hyperbolicité pseudo-Kähler** (et donc sous certaines hypothèses de compacité toutes les non-hyperbolicités complexes) de toute structure pseudo-complexe compatible respectant l' ω -convexité. On obtient différents énoncés traduisant ce résultat comme notamment pour les variétés fermées :

Théorème 1.0.3 *Soit (M, ω) une variété fermée symplectique ω -convexe, non symplectique hyperbolique : il existe une suite (M_j) croissante de domaines du revêtement universel \tilde{M} avec $\tilde{M} = \cup_i M_j$ telle que $\mu(M_j) = O(d_g(x_0, \partial M_j)^2)$. Alors pour toute structure pseudo-complexe compatible avec ω respectant cette structure ω -convexe (c'est-à-dire tel que son relevé \tilde{J} respecte la structure de contact des ∂M_j), (M, J) est non complexe hyperbolique .*

Par contraposée, on obtient une minoration de la croissance des capacités symplectiques des domaines compacts des variétés non complexes hyperboliques grâce à des résultats de la forme :

Théorème 1.0.4 *Soit (M^{2n}, ω) une variété symplectique convexe à l'infini. Si J est une structure pseudo-complexe compatible pour laquelle M est pseudo-Kähler hyperbolique, alors (si on note g la métrique associée à ω et J) (M, ω) est symplectique hyperbolique : pour toute suite croissante exhaustive de domaines M_j J -convexes ,*

$$\frac{\mu(M_j)}{d_g^2(\partial M_j, x_0)} \rightarrow \infty \quad \text{et} \quad \frac{\mu(M_j)}{\tau(M_j, \omega, J)} \rightarrow \infty$$

Toutefois, afin notamment de généraliser le théorème de Bangert, nous aimerions améliorer ce résultat en montrant que la non-hyperbolicité complexe obtenue ci-dessus est stable par petite déformation C^1 ou bien même que la non hyperbolicité symplectique implique la non-hyperbolicité complexe pour toute structure pseudo-complexe (uniformément) compatible (sans l'hypothèse qu'elle préserve la convexité). En établissant et utilisant des résultats liés à l'isopérimétrie, je montre que, si l'on se restreint à une classe de variétés satisfaisant des hypothèses de géométrie bornée, on peut obtenir de tels résultats. Plus précisément je montre que **si une variété pseudo-Kähler "à géométrie bornée" n'est pas symplectique hyperbolique, alors pour toute structure pseudo-complexe uniformément compatible avec la structure symplectique, la variété est non pseudo-Kähler -hyperbolique, et donc non complexe hyperbolique dans le cas compact**. Les résultats précis, et leurs hypothèses (plutôt techniques) sont énoncés au chapitre 5. Citons par exemple le théorème 5.1.2 (mais voir également théorèmes 5.1.1 et 5.1.4) :

Théorème 1.0.5 *Soit (M, ω, ψ, J_0) une variété de Stein non fortement symplectique hyperbolique. Si elle vérifie l'une des propriétés suivantes :*

1. *M est une variété à géométrie II_δ -bornée. Et elle vérifie l'hypothèse de non-hyperbolicité symplectique :*

$$\mu(M_a) \leq a^{(1-\delta)\frac{m}{2}}, \quad (1.1)$$

avec m une valeur isopérimétrique de M .

2. *M est à géométrie I_δ bornée. Et de plus M vérifie l'hypothèse de non-hyperbolicité symplectique :*

$$\mu(M_a) = O\left(a^{\min(1-\delta, (1+\delta)\frac{m}{2})}\right)$$

Alors, pour tout J uniformément compatible avec ω , (M, ω, J) est non pseudo-Kähler hyperbolique. Ainsi si (M, ω) admet un quotient compact (W, ω_0) , alors pour tout J compatible avec ω_0 , (M, J) n'est pas Brody-hyperbolique.

La variété \mathbb{C}^n vérifiant trivialement ces hypothèses de géométrie de bornée, ces résultats permettent de retrouver le résultat de Bangert et le généralisent à une classe plus large de variétés. Cette analyse me permet d'établir d'autres résultats de stabilité de la non-hyperbolicité complexe pour ces variétés à géométrie bien bornée : si l'hypothèse de non-hyperbolicité symplectique est plus faible (c'est-à-dire si on contrôle moins la croissance des capacités) on obtient tout de même que pour toute structure pseudo-complexe dans un voisinage C^1 de la structure complexe standard, la variété est non-complexe-hyperbolique. Citons par exemple théorème 5.1.3 :

Théorème 1.0.6 *Soit (M, ω, ψ, J_0) une variété de Stein non fortement symplectique hyperbolique. Si elle vérifie l'une des propriétés suivantes :*

1. *Pour $Q > 1$, il existe constante $C > 0$ telle que si S est une surface Q -minimisante avec $\partial S \subset M_{C^a}$ et $\text{aire}(S) \leq \mu(M_{a+1})$ alors $S \subset M_a$. De plus M est non (S) -symplectique hyperbolique.*
2. *M est à géométrie I_δ -bornée. De plus M est suffisamment non symplectique hyperbolique :*

$$\mu(M_a) = O\left(a^{\min(1, (1+\delta)\frac{m}{2})}\right)$$

Alors (M, ω, J_0) est non pseudo-Kähler hyperbolique et cela reste le cas sur un voisinage C^1 de J_0 : pour tout J compatible avec ω vérifiant pour un $C > 0$ $|\text{dd}^c \psi| < C$, (M, ω, J) est non pseudo-Kähler hyperbolique.

Citons plusieurs exemples d'application de ces résultats :

Corollaire 1.0.1 *Soit $W = \mathbb{CP}^n \setminus \{k \text{ hyperplans}\}$ pour $k \leq n$ munie de sa structure complexe canonique J_0 . Alors pour toute structure pseudo-complexe compatible avec la structure symplectique standard dans un voisinage C^1 de J_0 , la variété (W, J) n'est pas complexe hyperbolique.*

Corollaire 1.0.2 *Soit (N, ω_N, J_N) une variété "à géométrie bien bornée" (comme par exemple la variété hyperbolique \mathbb{H}^n). Alors si l'on considère la variété-produit $\mathbb{C}^n \times N$, munie de la structure symplectique $\omega = \omega_0 \otimes \omega_N$ et de la métrique riemannienne $g = g_0 \oplus g_N$, pour toute structure pseudo-complexe J (non nécessairement produit) uniformément compatible avec ω pour la métrique g , la variété produit $(\mathbb{C}^n \times N, J)$ est non pseudo-Kähler hyperbolique.*

En particulier, pour tout quotient compact N_0 de N (comme par exemple toute variété hyperbolique compacte \mathbb{H}^n/Γ), pour toute structure pseudo-complexe compatible avec $\omega_0 \otimes \omega_N$ sur $\mathbb{T}^{2n} \times N_0$, $(\mathbb{T}^{2n} \times N_0, J)$ et $(\mathbb{C}^n \times N, J)$ ne sont pas Brody-hyperboliques.

D'autres exemples d'applications plus généraux sont énoncés au chapitre 5.

Détaillons le plan de la thèse un peu plus précisément.

Dans un premier temps, chapitre 2, j'étudie l'aspect symplectique de la question. Après un rappel (2.1) de la construction de la cohomologie de Floer, de ses propriétés et de l'origine du morphisme c_M^* entre la cohomologie de Floer et la cohomologie usuelle de la variété, j'introduis et étudie en 2.2 la notion d'hyperbolicité symplectique et la capacité associée. Je définis d'abord cette notion pour une variété compacte à bord ω -convexe, puis introduis la capacité mesurant

la non-hyperbolicité d'une telle variété. Après avoir considéré le cas de \mathbb{C}^n et du disque hyperbolique \mathbb{D}^{2n} , et avoir obtenu une estimation précise de la croissance de la capacité dans le cas des variétés de Stein (2.2.4), je définis la notion d'hyperbolicité symplectique pour les variétés ouvertes ω -convexes (dont les variétés de Stein constituent un cas particulier) à partir de la croissance de la capacité des domaines compacts (puis la généralise aux variétés fermés quotients de telles variétés, variétés que j'appellerai aussi ω -convexes).

Afin de resituer cette nouvelle notion dans le cadre des notions déjà existantes, je compare également dans ce chapitre notre notion d'hyperbolicité symplectique avec la notion d'hyperbolicité introduite par Polterovich pour les variétés compactes, et je montre que la Polterovich-hyperbolicité implique notre hyperbolicité symplectique.

Puis, afin de mieux comprendre cette notion d'hyperbolicité symplectique, je m'intéresse (2.2.6) aux liens qu'elle peut avoir avec la courbure radiale dans le cadre de variétés hermitiennes à bouts coniques (le pendant "Riemannien" des variétés ω -convexes), montrant que, moins la courbure radiale est négative, moins la variété est symplectique hyperbolique.

Enfin (2.2.7) en utilisant les suites spectrales obtenues dans [34], je montre que, dans le cas d'une variété produit de deux variétés compactes à bord, la capacité du produit est plus petite que le minimum des deux capacités, ce qui permet d'en déduire que si une variété (même ouverte) est non symplectique hyperbolique, alors son produit avec n'importe quelle autre variété ω -convexe est encore non symplectique hyperbolique. J'obtiens un résultat similaire dans le cas des variétés fibrés par des disques.

Dans un second temps, chapitre 3, j'étudie l'aspect pseudo-complexe de la question. Après avoir rappelé les différentes définitions et notions d'hyperbolicités pseudo-complexes et leurs liens (en rappelant qu'elles sont toutes équivalentes dans le cas compact), j'introduis une nouvelle notion d'hyperbolicité pseudo-complexe (qui surgit naturellement au cours de la preuve de l'équivalence des différentes hyperbolicités complexes dans le cas compact) qui contrairement aux autres dépend de la structure pseudo-complexe mais aussi du choix d'une métrique. Ainsi dans le cas d'une métrique pseudo-Kähler, elle dépend de la structure pseudo-complexe mais aussi de la structure symplectique. On nommera cette notion pseudo-Kähler hyperbolicité. Je montre qu'elle est équivalente aux autres notions d'hyperbolicités complexes dans le cas des variétés compactes (ou plus généralement sous certaines hypothèses de compacité). Cette notion dépendant à la fois de la structure pseudo-complexe et de la structure symplectique constituera le lien naturel (avec les courbes pseudo-holomorphes) entre les notions d'hyperbolicités complexe et symplectique. Dans cette partie j'introduis et étudie également plusieurs outils pseudo-complexes qui nous seront utiles par la suite, et notamment un invariant de Nevanlinna τ qui associe à tout disque pseudo-holomorphe $f : \mathbb{D} \rightarrow M$, une quantité $\tau(f)$. Cet invariant nous permet notamment de montrer que s'il existe une suite de disques pseudo-holomorphes dont la croissance de l'aire est "contrôlée" par celle de τ alors la variété est non pseudo-complexe-hyperbolique (ou plutôt pseudo-Kähler-hyperbolique).

Dans le chapitre 4, en utilisant les outils précédents et l'hyperbolicité symplectique, on fait le lien entre les hyperbolicités symplectique et pseudo-complexe en expliquant comment la non hyperbolicité symplectique implique la non-hyperbolicité pseudo-complexe. Le lien naturel entre l'hyperbolicité pseudo-complexe (et plus particulièrement pseudo-Kähler) et les disques pseudo-holomorphes ayant déjà été étudié au chapitre précédent, il reste à faire le lien entre l'hyperbolicité symplectique et les disques pseudo-holomorphes. Pour cela (au 4.1) je démontre le théorème 1.0.2

qui affirme que dans le cas d'une variété compacte à bord de type contact, la non-hyperbolicité symplectique implique l'existence de disques pseudo-holomorphes.

Ainsi dans le cas de variétés ouvertes ω -convexes, si M est non symplectique hyperbolique, M s'écrit comme l'union de domaines compacts à bord dont on contrôle la croissance de la capacité. Ainsi, pour toute structure pseudo-complexe compatible, respectant la structure de contact du bord des domaines, on obtient une suite de disques pseudo-holomorphes, de plus en plus grands, dont on contrôle l'aire et la position du bord (le bord est inclus dans le bord des domaines compacts). Alors, en utilisant les outils pseudo-complexes introduits chapitre 3, on en déduit que pour toute structure pseudo-complexe compatible respectant la structure ω -convexe de la variété, si (M, ω) est suffisamment non symplectique hyperbolique, alors M est non pseudo-Kähler-hyperbolique et donc sous certaines hypothèses de compacité, non complexe hyperbolique. Cela est précisé par plusieurs théorèmes énoncés dans ce chapitre (correspondant aux différentes notions quantitatives d'hyperbolicités symplectiques) dont notamment le théorème 1.0.3. Ces résultats se lisent par contraposée : "s'il existe une structure pseudo-complexe compatible J telle que (M, J) est non complexe hyperbolique alors (M, ω) est non symplectique hyperbolique" : plus précisément, sous ces hypothèses, on obtient une minoration de la croissance de la capacité des domaines J -convexes (voir notamment le théorème 1.0.4).

Le premier cadre d'application de ces résultats est celui des variétés de Stein (notons que, suivant en cela notamment [4], tout au long de cette thèse, nous adopterons une définition des variétés de Stein plus souple que celle de [11], n'exigeant pas la complétude de la variété ni l'intégrabilité de la structure pseudo-complexe, voir la définition 1.2.4) qui constituent un cas particulier des variétés symplectiques ω -convexes (d'autant plus que dans le cas des variétés de Stein sous-critiques on sait que la capacité des domaines compacts est finie et l'on a obtenu une estimation de la croissance de la capacité). On obtient par exemple ainsi des résultats de non-hyperbolicité complexe pour les variétés $M = W \setminus H$ (où M est une variété Kähler fermée et H une hypersurface complexe), en montrant notamment que les polarisations sous-critiques ne sont pas complexes hyperboliques.

On montre enfin, en utilisant notre étude du lien entre hyperbolicité symplectique et courbure radiale, que dans le cadre des variétés à bouts à courbure radiale "bien bornée", qui constituent un autre exemple de variétés ω -convexes, si M est non fortement symplectique hyperbolique et à courbure radiale positive ou nulle alors elle est non pseudo-Kähler hyperbolique.

Toutefois, partant de l'idée que l'ensemble des structures pseudo-complexes compatibles à une même structure symplectique est un ensemble contractile, que la notion d'hyperbolicité symplectique ne dépend a priori que de la structure symplectique (et pas de la structure pseudo-complexe), et avec en tête le résultat de Bangert, on aimerait pouvoir obtenir ces mêmes résultats sans l'hypothèse que J préserve la structure pseudo-complexe, et montrer que, sous certaines hypothèses sur M , si (M, ω) est suffisamment non symplectique hyperbolique alors M est non complexe hyperbolique pour toute structure pseudo-complexe (uniformément) compatible avec ω . C'est l'objet du chapitre 5. J'établis pour cela plusieurs lemmes isopérimétriques qui me permettent de montrer le résultat souhaité pour des variétés à géométrie bien bornée. Je généralise ainsi à de telles variétés non symplectiques hyperboliques le résultat de Bangert, et montre que pour ces variétés, la propriété de non-hyperbolicité complexe est stable par déformation de la structure pseudo-complexe dans l'ensemble des structures compatibles à la structure symplectique fixée.

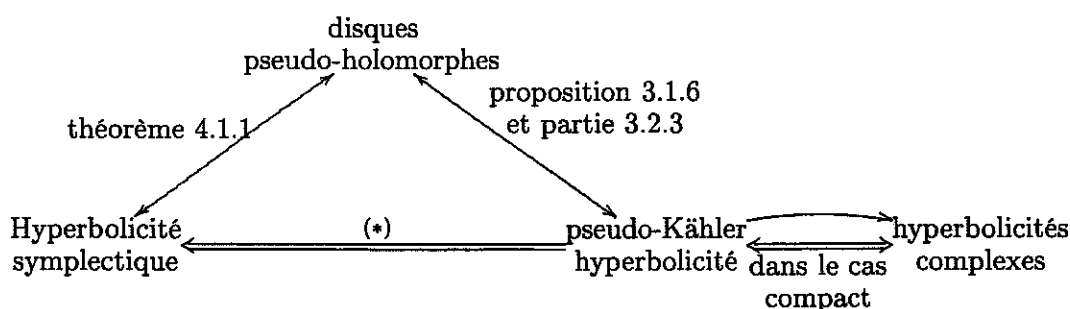
La démonstration de ces résultats est basée sur la même idée que ceux du chapitre précédent, mais

comme pour une structure pseudo-complexe compatible quelconque, on n'a pas nécessairement la J -convexité des domaines compacts, elle utilise de façon fondamentale le fait que l'ensemble des structures compatibles est contractile, et elle m'a demandé d'établir un certain nombre de résultats sur les courants quasi-minimisants afin de pouvoir couper les courbes pseudo-holomorphes. Soulignons que ces résultats pourront être utiles dans de nombreuses autres études.

Une fois encore ces résultats s'appliquent particulièrement bien au cas des variétés $M = W \setminus H$. Les résultats que l'on obtient pour ces variétés permettent par exemple de montrer le corollaire 1.0.1. Plus généralement, je montre que ce résultat est vrai aussi pour $\mathbb{P}^n \mathbb{C}$ privé d'hypersurfaces vérifiant certaines hypothèses techniques.

Enfin 5.1.3, j'utilise la stabilité de la non-hyperbolicité symplectique par produit avec n'importe quelle variété ω -convexe pour trouver de nombreux autres exemples où ces résultats s'appliquent et où la variété est non complexe hyperbolique pour toute structure pseudo-complexe compatible à une même structure symplectique : pour une large classe de variétés qui ne sont pas complexes (ni symplectique) hyperboliques (M, ω, J) , le produit de M avec des variétés (N, ω, J') (dont la géométrie vérifie un certain nombre d'hypothèses) reste non complexe hyperbolique pour n'importe quelle structure pseudo-complexe compatible avec $\omega \otimes \omega'$ (même non produit). Cela s'applique par exemple au cas de tout produit de \mathbb{C}^n avec une variété à "géométrie bien bornée" (le disque hyperbolique en constituant un cas particulier), ou encore pour tout produit de variété non symplectique hyperbolique "à géométrie bornée" avec le disque hyperbolique \mathbb{D}^{2n} . En particulier, on obtient l'existence de plans pseudo-holomorphes pour toute structure pseudo-complexe (même non produit) sur $\mathbb{T}^{2n} \times N_0$ compatible avec la structure symplectique standard (où N_0 est un quotient compact d'une variété à géométrie bien bornée) avec le corollaire 1.0.2. Des résultats plus généraux sont énoncés dans cette section.

Résumons par un schéma les idées principales de ce travail :



(*) : On prouve dans la section 4.2.1 que si une variété ω -convexe est non-symplectique-hyperbolique alors elle est non-pseudo-Kähler-hyperbolique pour toute structure pseudo-complexe compatible respectant l' ω -convexité. Si on se restreint à des variétés vérifiant certaines hypothèses isopérimétriques, ou à géométrie "bien bornée", on prouve que si la variété est suffisamment non-symplectique-hyperbolique alors elle est non-pseudo-Kähler-hyperbolique pour toute structure pseudo-complexe compatible.

Enfin dans une dernière partie III, nous abordons une question un peu différente qui est celle de l'hyperbolicité des feuilletages, cette partie ne constituant qu'un premier pas dans l'étude de cette vaste question. Elle surgit naturellement dans le cadre de notre étude, car dès lors que l'on parvient à montrer la non-hyperbolicité complexe et donc l'existence de plan holomorphe

complexe, on peut se demander si on peut montrer, pour tout point, l'existence d'un tel plan passant par ce point, et si ainsi on peut obtenir un feuilletage de la variété. Les questions qui se posent alors sont : ce feuilletage est-il holomorphe ? Et si oui, ces plans ("feuilles") holomorphes définissent-ils un cylindre holomorphe ?

Cette dernière question est étroitement reliée à la question de l'hyperbolicité de la mesure : comme l'hyperbolicité complexe correspond à la non-existence de plans holomorphes non constants, l'hyperbolicité de la mesure correspond elle à la non existence de cylindres holomorphes. J'ai donc naturellement décidé d'aborder ce vaste problème par cette question : dans le cas de feuilletages holomorphes paraboliques (*i.e.* dont toutes les feuilles sont des plans complexes ou leurs quotients), existe-il des cylindres holomorphes feuilletés (*i.e.* des cylindres le long du feuilletage) ? Grâce à l'étude de connections définies sur le fibré tangent au feuilletage, je définis un invariant du feuilletage qui est nul si et seulement si une telle application holomorphe existe. Cela me permet donc d'exhiber une condition en termes d'existence de sections holomorphes non nulles d'un fibré holomorphe au-dessus du feuilletage. Cette étude me permet d'obtenir des résultats sur la théorie des feuilletages par surfaces de Riemann et constitue une première étape dans l'étude de l'hyperbolicité (à la fois symplectique et pseudo-complexe) des feuilletages.

Avant de commencer notre étude, rappelons brièvement les définitions des différentes notions évoquées dans cette introduction ainsi qu'un certain nombre de propriétés fondamentales de géométrie symplectique et pseudo-complexe que nous utiliserons par la suite.

1.1 Rappels de géométrie symplectique et pseudo-complexe

Pour plus de détails à propos des notions présentées dans cette partie, on pourra consulter [1], [2], [26], ou [32].

D'un côté, une **structure symplectique** sur une variété M^{2n} est une 2-forme ω fermée non-dégénérée.

D'un autre côté une **structure pseudo-complexe** sur M^{2n} est la donnée d'une section J du fibré des endomorphismes de TM vérifiant en chaque point $x \in M$ $J_x^2 = -Id$. C'est une généralisation des structures complexes : une structure pseudo-complexe est une vraie structure complexe si et seulement si J est intégrable, si et seulement si il existe un système de cartes tels que les changements de cartes ($\phi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$) soient holomorphes (pour la structure complexe canonique de $\mathbb{C}^n \sim \mathbb{R}^{2n}$).

Si une variété M est munie à la fois d'une structure symplectique ω et d'une structure pseudo-complexe, on dit que ces deux structures sont **compatibles** si en tout point $\omega(., J.)$ définit une métrique riemannienne sur M .

Notons que l'on utilise parfois une notion de compatibilité plus faible qui demande seulement à ce que pour tout $v \neq 0$, $\omega(v, Jv) > 0$. On adoptera ici plutôt la première définition, c'est-à-dire que l'on demande, en plus de la stricte positivité de $\omega(v, Jv) > 0$, que ω soit J -invariante.

La métrique ainsi obtenue sera appelée **pseudo-Kähler**. Dans le cas où J est une structure complexe il s'agit d'une métrique Kähler au sens habituel.

On sait [21] que :

Lemme 1.1.1 *Soit (M, ω) une variété symplectique. L'ensemble des structures pseudo-complexes compatibles avec ω est non vide et contractile.*

Dans cette thèse nous considérerons des variétés (M, ω, J) munies de structures symplectiques et pseudo-complexes compatibles (une variété pseudo-Kähler selon la terminologie ci-dessus) et notre objectif sera de comparer les propriétés de la variété symplectique (M, ω) et celles de la variété pseudo-complexe (M, J) .

L'exemple le plus simple est bien entendu \mathbb{C}^n muni de sa structure complexe standard J_0 (la multiplication par i) et de sa structure symplectique canonique $\omega_0 = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i$. La métrique associée $g_0 = \omega_0(\cdot, J_0 \cdot)$ est la métrique euclidienne canonique.

Comme nous le disions dans l'introduction, un des outils principaux de cette étude sera les courbes pseudo-holomorphes :

Si (N, j) et (M, J) sont deux variétés pseudo-complexes, on dit qu'une application $\mathcal{C}^1 f : N \rightarrow M$ est **pseudo-holomorphe** (ou J -holomorphe) si $f_* \circ j = J \circ f_*$.

Si N est une surface de Riemann, on dit que $f(N)$ est une **courbe J -holomorphe**.

Si g est une métrique J -invariante (en particulier si g est une métrique pseudo-Kähler $\omega(\cdot, J \cdot)$) alors pour tout domaine D de \mathbb{C} et toute courbe J -holomorphe $f : D \rightarrow M$, on vérifie directement que f est **conforme** : $\forall z \in D, \forall v \in T_z D \simeq \mathbb{C}$ tel que $|v|^2 = 1$, $|df_z(v)|^2 = |df_z(1)|^2$ est indépendant de v . On peut donc définir $|f'(z)| = |df_z(v)| \forall v \in T_z D \simeq \mathbb{C}$ tel que $|v|^2 = 1$.

Pour finir, ajoutons une dernière remarque générale faisant le lien entre les structures pseudo-complexes et symplectiques : si $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction lisse. On peut lui associer à la fois son champ Hamiltonien X_H vérifiant $\omega(X_H, \cdot) = dH$ et son champ de gradient ∇H pour la métrique $g = \omega(\cdot, J \cdot)$ (défini par $dH = g(\nabla H, \cdot)$). On remarque alors que $\nabla H = JX_H$.

1.2 Convexité symplectique et pseudo-complexe

On dispose à la fois dans le cadre symplectique et dans le cadre pseudo-complexe de notions de convexité (notions analogues à la convexité \mathbb{R}^{2n} mais définies dans le contexte plus général de variétés symplectiques, *resp.* pseudo-complexe). Dans cette partie nous rappellerons leurs définitions et montrerons qu'elles apparaissent comme les pendants l'une de l'autre.

Dans le cadre symplectique [11], un ouvert relativement compact est **convexe** (*i.e.* symplectique convexe) s'il est à bord de type contact (ou, notion plus forte à bord de type contact restreint). Plus précisément :

Définition 1.2.1 Une hypersurface orientée Σ incluse dans une variété symplectique (M, ω) est dit de **type contact** s'il existe sur un voisinage V de Σ un champ de vecteur X , transverse, pointant vers l'extérieur, tel que $\mathcal{L}_X \omega = \omega$.

Notons qu'alors $\alpha = i_X \omega$ vérifie $d\alpha = \omega$ et qu'ainsi $\alpha|_{T\Sigma}$ munit Σ d'une structure de contact.

D'après [11], un ouvert relativement compact est dit **localement ω -convexe** s'il est à bord de type contact.

On préférera parfois considérer plutôt les ouverts à bord de **type contact restreint** : c'est-à-dire que l'on impose que $\partial U = \Sigma$ soit de type contact et que le champ X de la définition puisse être défini sur U entier. On dit alors [11] que U (ou Σ) est **ω -convexe dans U** .

Si le champ X est défini sur M entier, on dira que U (ou Σ) est **globalement ω -convexe** ou **ω -convexe dans M** .

Dans le cas de variétés ouvertes (M, ω) , on dit que M est **ω -convexe** ou **ω -convexe à l'infini**

si M s'écrit comme l'union croissante $\cup M_j$ de domaines compacts ω -convexes.

Pour notre étude, il est de généraliser cette notion aux variétés fermées : une variété fermée (M, ω) est ω -convexe si son revêtement universel $(\widetilde{M}, \widetilde{\omega})$ l'est.

La cohomologie de Floer, à la base de la définition l'hyperbolicité symplectique, étant définie pour les variétés compactes à bord de type contact, les variétés pour lesquelles nous pourrions naturellement introduire l'hyperbolicité symplectique seront les variétés ω -convexes. Elles constitueront le cadre d'étude de cette thèse.

Le pendant pseudo-complexe de la notion symplectique "hypersurface de type contact" ou " ω -convexité" est la notion de J -convexité :

Définition 1.2.2 Soit Σ une hypersurface orientée incluse dans (M, J) une variété pseudo-complexe. Soit $\zeta = T\Sigma \cap JT\Sigma$ champ d'hyperplan complexe de $T\Sigma$. Sur $T\Sigma$ il est localement défini (avec orientation) par $\{\tau = 0\}$. On dit que Σ est J -convexe, ou pseudo-convexe, si $d\tau(v, Jv) > 0$ pour tout $v \in \zeta \setminus \{0\}$.

Un ouvert relativement compact dans M est dit J -convexe si son bord est J -convexe.

Notons que dans le cas où Σ (orientée) est localement définie par $\{\phi = \text{constante}\}$ avec $\nabla\phi$ pointant vers l'extérieur, alors ζ est défini par $\tau = d^c\phi$, où, par définition, $d^c\phi = -d\phi \circ J$.

Alors la J -convexité est équivalente à ce que $dd^c\phi(v, Jv) > 0$ pour tout $v \in (Ker d\phi \cap Ker d^c\phi) \setminus \{0\}$. Cette propriété est impliquée par la pluri-sous-harmonicité de ϕ , propriété qui sera définie un peu plus bas définition 1.2.3 (qui généralise la sous-harmonicité des fonctions définies sur \mathbb{C}). Cette remarque nous permet d'en déduire une propriété caractéristique importante des variétés J -convexes, et qui, nous allons le voir, permet de contrôler la position des courbes J -holomorphes (et ainsi d'obtenir des résultats de compacité analogues à ceux des variétés compactes) :

Lemme 1.2.1 Une hypersurface pseudo-convexe ne peut être touchée intérieurement par une courbe J -holomorphe : si Z est une sous variété de codimension 0 de M , $\Sigma \subset \partial Z$ est J -convexe, et $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow Z \subset M$ est J -holomorphe, alors f ne peut être tangente à Σ .

Dém. Localement, il existe $\psi : Z \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction C^∞ telle que $\Sigma = \psi^{-1}(1)$ et $\nabla\psi$ pointe vers l'extérieur de Z i.e. localement, sur un voisinage V de Σ dans Z , $Z \cap V = \{\psi \leq 1\}$. Alors, comme souligné plus haut, par définition de la J -convexité on a que pour $v \in \zeta_x \setminus \{0\}$, $dd^c\psi(v, Jv) > 0$. Supposons par l'absurde qu'il existe $f : \mathbb{D} \rightarrow V \subset Z$, J -holomorphe et tangente à Σ en un point $x = f(0)$. Alors $Im(df_0) \subset T_x\Sigma$, et comme f est J -holomorphe, on a même, $Im(df_0) \subset \zeta_x$; et donc $dd^c(\psi \circ f) = f^*(dd^c\psi)$ en 0 définit une forme définie positive sur $T_0\mathbb{D}$. La fonction $\psi \circ f$ est donc sous-harmonique, mais par hypothèse sur ψ elle a un maximum en 0, ce qui est absurde et conclut la démonstration. ■

Expliquons maintenant les liens entre les "deux notions de convexité" : la notion symplectique de ω -convexité et la notion complexe de J -convexité. Rappelons que, [11], la conception d'Eliashberg et Gromov de l' ω -convexité était inspirée par la pseudo-convexité complexe.

Tout d'abord on constate que si Σ est J -convexe, la 1-forme τ apparaissant dans la définition de J -convexité munit Σ d'une structure de contact (toutefois Σ n'est pas nécessairement de type contact dans (M, ω) ; $d\tau$ peut ne pas être égale à ω), ce qui est donne une première idée de ce qui explique que les notions de pseudo-convexité et de type contact soient vues comme les pendants l'une de l'autre. Etudions plus précisément les liens entre ces deux notions. Citons tout d'abord une proposition [1] :

Proposition 1.2.1 *Si Σ est une hypersurface de type contact dans une variété symplectique (M, ω) alors il existe une structure pseudo-complexe J compatible avec ω telle que Σ soit J -convexe.*

Et en fait, plus précisément je vérifie :

Lemme 1.2.2 *Soient (M, ω) une variété symplectique relativement compacte à bord de type contact et σ une structure de contact correspondante sur Σ . Si J est une structure pseudo-complexe compatible avec ω qui préserve les plans de contact. Alors Σ est J -convexe.*

Dém. : On a que $\{\sigma = 0\} = J\{\sigma = 0\} \subset T\Sigma \cap JT\Sigma$. En comparant les dimensions on constate que l'inclusion est en fait une égalité. On peut donc choisir $\tau = \sigma$ pour le τ définissant $\zeta = T\Sigma \cap JT\Sigma$ introduit dans la définition 1.2.2. Et comme $d\sigma = \omega$ sur $\{\sigma = 0\}$, Σ est bien J -convexe. ■

Réciproquement, même si Σ est J -convexe et ω est une forme symplectique compatible avec J , nous avons mentionné que Σ n'est pas nécessairement de type contact. Toutefois si $\Sigma = \{\phi = 1\}$, la J -convexité de Σ est équivalente à ce que $dd^c_J \phi(v, Jv) > 0$ pour tout $v \in T\Sigma \cap JT\Sigma \setminus \{0\}$. Si on exige que $dd^c_J \phi(v, Jv) > 0$ pour tout $v \in TM|_\Sigma$ alors Σ est aussi de type contact pour la forme symplectique localement définie sur un voisinage de Σ par $dd^c_J \phi$ (et on prend $\alpha = d^c_J \phi$ comme forme de contact).

Cette hypothèse correspond à la définition de la pluri-sous-harmonicité de ϕ .

Rappelons la définition de pluri-sous-harmonicité :

Définition 1.2.3 *Soient (M, J) une variété pseudo-complexe et $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ une application lisse. Alors, f est (strictement) **pluri-sous-harmonique (psh)** si $dd^c f$ est définie positive sur les droites complexes de TM : $dd^c f(v, Jv) > 0$, $\forall v \in TM - \{0\}$, i.e. si la 2-forme $dd^c f$ est une forme symplectique compatible avec J .*

Nous avons remarqué que si $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction pluri-sous-harmonique propre sur (M, J) , une variété pseudo-complexe, les ensembles de la forme $\{\psi \leq a\}$, (avec a non valeur critique de ψ), constituent un exemple intéressant de domaines J -convexes. Notons que dans ce cas-là, ces ensembles J -convexes sont aussi de type contact, et même globalement ω -convexes : le champ X transverse étant défini comme $\nabla \psi$, le champ de gradient de ψ pour la métrique associée à ω et J ($R = X_\psi$ et $\alpha = d^c_J \psi$).

La notion de fonction psh nous permet alors de définir :

Définition 1.2.4 *Une variété pseudo-complexe (W^{2n}, J) est une **variété de Stein** s'il existe une fonction $\psi : W \rightarrow \mathbb{R}$, C^∞ J -pluri-sous-harmonique (i.e., $\omega_\psi = dd^c_J \psi$ est une forme symplectique compatible avec J), et exhaustive (i.e., ψ est propre et bornée inférieurement).*

Un domaine de Stein est un ouvert $V_c = \{\psi < c\}$ d'une variété de Stein (W, J, ψ) , où c est une valeur régulière de ψ .

On n'inclut par la complétude (ni l'intégrabilité de la structure pseudo-complexe) au sens de [11] dans la définition car nos résultats s'appliqueront à cette plus large classe de variétés. L'exemple basique est évidemment :

Exemple 1.2.1 \mathbb{C}^n muni de sa structure complexe standard J_0 (et de sa forme symplectique canonique ω_0) est une variété de Stein : la fonction $\psi_0 = \frac{|z|^2}{4}$ est psh et $dd^c \psi = \omega_0$.

En fait plus généralement on a :

Exemple 1.2.2 *Toute variété complexe (M^{2n}, J) qui peut être holomorphiquement plongée dans un \mathbb{C}^N est de Stein.*

(La restriction de ψ_0 à la variété proprement plongée est encore psh et exhaustive).

D'après [11], la réciproque est vraie pour les variétés complètes.

Citons un autre exemple basique de variétés de Stein que l'on ne pourrait oublier dans notre étude de l'hyperbolicité : celui du disque hyperbolique $\mathbb{D}^{2n} = B^{2n}(1)$ muni de sa structure complexe canonique J_0 (celle induite par celle sur \mathbb{C}) et de la métrique hyperbolique : si $v \in T_z \mathbb{D}^{2n}$, $|v|_{\text{hyp}} = \frac{|v|_{\text{euc}}}{1-|z|^2}$. La forme symplectique associée est donc $\omega_{\text{hyp}} = \frac{\omega_0}{(1-|z|^2)^2}$ où ω_0 est la forme symplectique standard de \mathbb{C}^n .

Exemple 1.2.3 *La boule hyperbolique $(\mathbb{D}^{2n}, J_0, \omega_{\text{hyp}})$ est une variété de Stein. En effet si on pose $\phi = \frac{1}{4} \ln \left(\frac{1}{1-|z|^2} \right)$, alors $\omega_{\text{hyp}} = \text{dd}^c \phi$.*

Notons enfin comme dernière remarque préliminaire que si $(M_1, J_1, \psi_1, \omega_1)$ et $(M_2, J_2, \psi_2, \omega_2)$ sont deux variétés de Stein alors la variété produit $M_1 \times M_2$ est aussi une variété de Stein, munie des formes complexes et symplectiques produits $J_1 \oplus J_2$ et $\omega_1 \oplus \omega_2$, et de la fonction plurisousharmonique $\psi = \psi_1 + \psi_2$.

Nous avons vu que les domaines de Stein étaient à la fois J -convexes et de type contact pour la structure symplectique ω_ψ . De plus la variétés de Stein sont un cas particulier de variétés ω -convexes.

Ainsi les variétés ω -convexes et les variétés de Stein (au sens de la définition [?]) seront le cadre d'étude de cette thèse.

Première partie

Etude de l'hyperbolicité symplectique et complexe

Chapitre 2

Cadre symplectique

2.1 Cohomologie de Floer

L'homologie (ou cohomologie) de Floer est un invariant symplectique provenant de la nouvelle approche de l'homologie de Morse introduite par Floer [15] permettant de construire une (co)homologie engendrée par les orbites fermées d'un Hamiltonien ; celle-ci peut être vue comme l'homologie de Morse d'une fonctionnelle définie sur un espace de dimension infinie. Dans le cadre des variétés fermées, elle a largement été étudiée et il a été prouvé (voir par exemple [26]) qu'elles coïncidaient avec la (co)homologie habituelle de la variété. Par ailleurs, l'autre cadre dans lequel on peut définir la cohomologie de Floer est celui des variétés compactes à bord de type contact qui présentent le même type de propriétés de compacités nécessaires à la définition. C. Viterbo [39] a défini une version de la cohomologie de Floer pour ces variétés. C'est cette définition que j'adopterai et rappellerai dans cette partie, une question majeure étant "coïncide-t-elle avec la cohomologie de la variété?". Cette question est à la base de la définition d'hyperbolicité symplectique et sera donc au centre de ma thèse. Je rappellerai donc dans un premier temps la construction de cette cohomologie de Floer, en expliquant particulièrement l'origine du morphisme c_M^* entre la cohomologie de Floer et la cohomologie usuelle de la variété. Cela me permettra ensuite de définir la notion d'hyperbolicité symplectique des variétés compactes à bord de type contact, et la capacité associée (mesurant la non hyperbolicité symplectique). Suivra une première étude de cette capacité qui me permettra d'obtenir une estimation de sa croissance dans le cas des variétés de Stein, en termes de *fonctions de croissance* associées à la fonction pluri-sous-harmonique, que j'introduis à cette occasion et qui nous réapparaîtront souvent dans la suite de l'étude. Comme nous l'expliquerons, celles-ci sont reliés aux fonctions de croissance introduites par Polterovich [35]. J'expliquerai alors comment naturellement on peut étendre la définition d'hyperbolicité symplectique au cas des variétés ω -convexes en utilisant cette notion de capacité.

J'étudierai enfin un peu plus en détails cette notion (et la capacité associée), et ce plus particulièrement dans le cas de variétés à bouts coniques afin de voir le lien entre l'hyperbolicité symplectique et la courbure radiale, et dans le cas des variétés produit et fibrés.

Considérons donc dans un premier temps une variété symplectique (M, ω) compacte à bord de type contact, vérifiant $[\omega]\pi_2(M) = 0$. Notons que cette hypothèse peut être supprimée (voir [39] par exemple) mais elle évite de nombreuses difficultés techniques (dues notamment au phénomène de bubbling quand il existe des sphères holomorphes) et, dans le cadre de notre étude, elle est très naturelle. En effet, notre objectif est de voir un lien avec l'hyperbolicité complexe, c'est-à-dire

avec l'existence de plans pseudo-holomorphes, mais s'il existe des sphères pseudo-holomorphes, on a automatiquement des plans (et la question de l'existence des plans ne se posent plus).

L'hypersurface $\Sigma = \partial M$ étant de type contact, il existe un champ de vecteurs X au voisinage V de Σ , transverse à Σ , et tel que $\mathcal{L}_X \omega = \omega$. Notons que celui-ci n'est pas unique (si X convient alors pour toute fonction f sur V , si $X' = X + X_f$ est encore transverse il convient aussi). Un tel champ X étant fixé, alors la 1-forme α définie au voisinage de Σ par $\alpha = i_X \omega$ vérifie $d\alpha = \omega$, et $\sigma = \alpha|_\Sigma$ définit la structure de contact de Σ . On notera $\xi = \{\sigma = 0\}$ les hyperplans de contact de Σ .

On peut alors définir sur Σ le champ de Reeb R :

$$\begin{cases} i_R d\sigma = 0 \\ \sigma(R) = 1. \end{cases}$$

Notons que la droite de Reeb $\mathbb{R}.R$ est elle indépendante du choix de X et des champs de contact ξ (elle ne dépend que de ω). En effet elle est entièrement déterminée par $i_R \omega|_{T\Sigma} = 0$.

La variété symplectique M peut être munie d'une structure pseudo-complexe compatible : dans le cas des variétés à bord de type contact on exige une propriété de compatibilité supplémentaire (en plus de la stricte positivité et de la J -symétrie de $\omega(., J.)$) :

Définition 2.1.1 Si (M, ω) est une variété symplectique à bord de type contact Σ , une structure pseudo-complexe J est dite compatible avec ω si $\omega(., J.)$ détermine une métrique riemannienne sur M et si J préserve une structure de contact $\xi = \{\sigma = 0\}$.

Supposons désormais fixés ξ un champ d'hyperplans de contact et J une structure pseudo-complexe compatible préservant ce champ d'hyperplans. Ce champ est associé à un champ de vecteurs X (comme introduit ci-dessus) transverse à Σ vérifiant :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_X \omega = \omega \\ \xi = \ker(i_X \omega)|_\Sigma. \end{cases} \quad (2.1)$$

Notons que, même une fois fixée ξ , un tel champ n'est pas uniquement déterminé. En effet, si un tel champ X_0 est fixé, notons $\alpha_0 = i_{X_0} \omega$, $\sigma = (\alpha_0)|_{T\Sigma}$ la 1-forme de contact associée et R le champ de Reeb sur Σ associé. Comme $i_R \omega = 0$ sur $T\Sigma$, on peut prolonger R au voisinage de Σ en un champ vérifiant $d(i_R \omega) = 0$. On remarque alors que les champs $X = X_0 + aR$ conviennent également pour tout $a \in \mathbb{R}$ (on vérifie immédiatement les équations (2.1)). De plus, comme $i_X \omega = i_{X_0} \omega$ sur $T\Sigma$ on remarque que la 1-forme de contact σ est inchangée par ce changement de vecteur transverse ; le champ de Reeb R est donc également inchangé.

Ainsi, une fois fixée une structure pseudo-complexe compatible préservant un champ ξ , on peut choisir un champ transverse X associé à ξ tel que JR et X soient colinéaires en tout point. Il suffit pour cela de choisir $X = X_0 + aR$ avec $a = -\frac{\omega(R, JX_0)}{\omega(R, JR)}$. Alors $\omega(R, JX) = 0$ et donc (par définition de R) $JX \in T\Sigma$. De plus, pour tout $v \in \xi$, $\omega(JX, v) = -\omega(X, Jv) = 0$ (car $\xi = \ker(i_X \omega)$ est invariant par J). Finalement $\omega(JX, v) = 0$ pour tout $v \in T\Sigma$ et par définition du champ de Reeb, JX est donc colinéaire à R . Désormais on se fixera un tel champ transverse X vérifiant cette propriété. Il existe alors une fonction f telle que $JX = fR$.

2.1.1 Construction de \tilde{M}

Conservons les notations précédentes : soient $\xi = \{\sigma = 0\}$ le champ d'hyperplans de type contact sur M , R le champ de Reeb, X un champ transverse à Σ (défini sur un voisinage V de Σ) tel que $\mathcal{L}_X \omega = \omega$ (et $JX = fR$ pour une fonction f sur Σ), $\alpha = i_X \omega$ 1-forme telle que $d\alpha = \omega$.

Les orbites fermées de R sont appelées les caractéristiques (fermées) de Σ . L'action $\mathcal{A}(\gamma) = \int_\gamma \gamma^* \sigma$ d'une orbite fermée γ est égale à sa période T . On définit le spectre $\mathcal{S}(\Sigma)$ de Σ , comme l'ensemble des actions de toutes les caractéristiques fermées de Σ .

On supposera désormais ce spectre discret (hypothèse générique) et on notera $T_0 = \inf \mathcal{S}(\Sigma)$.

Exemple : $M = \mathbb{B}^{2n}(1)$, $\omega_0 = \sum dx_j \wedge dy_j$. Alors, $X = \frac{z}{2}$, $\alpha = \frac{1}{2} \langle iz, \cdot \rangle$ et $R = i2z$. Ainsi $\mathcal{S}(\Sigma) = \{k\pi, k \in \mathbb{N}^*\}$.

Soit ϕ_t le flot associé à X sur le voisinage V de Σ . Il vérifie $\phi_t^* \alpha = e^t \alpha$. Pour ϵ_0 suffisamment petit, on peut alors définir

$$\psi : \begin{cases} \Sigma \times]1 - \epsilon_0, 1] \longrightarrow V \\ (x, z) \longrightarrow \phi_{\ln(z)}(x). \end{cases}$$

Alors $\psi^* \alpha = z\sigma$ et $\psi^* \omega = d(z\sigma)$.

Ainsi, quitte à restreindre le voisinage (V, ω) , on peut l'identifier à $(\Sigma \times]1 - \epsilon_0, 1], d(z\sigma))$.

On peut donc étendre (M, ω) et construire $(\tilde{M}, \tilde{\omega})$:

$$\tilde{M} = M \cup \Sigma \times [1, +\infty[,$$

en prolongeant ω par :

$$\tilde{\omega} = \begin{cases} \omega \text{ sur } M \\ d(z\sigma) \text{ sur } \Sigma \times [1, +\infty[. \end{cases}$$

On prolonge la fonction z naturellement définie comme étant la deuxième coordonnée sur $\Sigma \times [1 - \epsilon_0, \infty[$ (modulo l'identification de V à $\Sigma \times]1 - \epsilon_0, 1]$) par une fonction à valeurs dans $[0, 1 - \epsilon_0]$ sur $M \setminus V$.

Sur $\Sigma \times]1 - \epsilon_0, +\infty[$, on note que $T\tilde{M} = T\Sigma \oplus \mathbb{R} \frac{\partial}{\partial z}$, et que $\tilde{\omega} = dz \wedge \sigma + d\sigma$. Ainsi, $\tilde{\omega}(R, v) = 0$ si $v \in T\Sigma$ et $\tilde{\omega}(R, \frac{\partial}{\partial z}) = -1$. D'où $i_R \tilde{\omega} = -dz$.

Considérons maintenant la structure pseudo-complexe. Remarquons tout d'abord que comme par hypothèse J préserve les hyperplans de contact $\{\sigma = 0\}$, d'après le lemme 1.2.2 l'hypersurface Σ est J -convexe. On prolonge alors J en \tilde{J} sur \tilde{M} de manière standard (*i.e.* indépendante de z sur $\Sigma \times [1, \infty[$), rendant ainsi les hypersurfaces $\Sigma \times \{z\}$, pour $z \geq 1$ pseudo-convexes.

On notera par la suite, pour $1 - \epsilon_0 < a < b$, $M_{[a,b]} = \{(x, z) \in \Sigma \times]1 - \epsilon_0, \infty[\mid z \in [a, b]\}$, $S_a = \{(x, z) \mid z = a\}$ et $M_a = M \setminus V \cup \{(x, z) \in \Sigma \times]1 - \epsilon_0, \infty[\mid z \leq a\}$.

2.1.2 Hamiltoniens adaptés

Soit H un Hamiltonien sur \widetilde{M} , $H : \mathbb{R} \times \widetilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$. On lui associe le champ de vecteurs Hamiltoniens X_H défini par $i_{X_H} \widetilde{\omega} = dH$. On étudie les orbites 1-périodiques de X_H .

Si $\gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow \widetilde{M}$ est un lacet contractile quelconque, on définit son action :

$$\mathcal{A}_H(\gamma) = - \int_{\mathbb{D}} \bar{\gamma}^* \widetilde{\omega} - \int_{\mathbb{S}^1} H(t, \gamma(t)) dt,$$

où $\bar{\gamma}$ est un prolongement de γ à \mathbb{D} (l'intégrale est bien définie de manière unique car $[\omega]\pi_2(M) = 0$).

Tout d'abord, notons que si $\gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow \widetilde{M}$ et Y "une variation" de γ , i.e. un champ de vecteurs le long de γ ,

$$\begin{aligned} d\mathcal{A}_H(\gamma)(Y) &= \int_{\mathbb{S}^1} -\gamma^*(i_Y \widetilde{\omega}) - \gamma^*(dH(Y)) \\ &= \int_{\mathbb{S}^1} \widetilde{\omega} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial t} - X_H, Y \right) \end{aligned}$$

Ainsi les points critiques de \mathcal{A}_H sont exactement les orbites 1-périodiques de X_H .

On considérera uniquement les champs associés à des Hamiltoniens H adaptés, i.e. ceux vérifiant pour un $a > 1 - \epsilon_0$, $H(t, (x, z)) = h(z)$ sur $\{z \geq a\}$, avec h une fonction convexe croissante sur $[a, +\infty[$. Alors sur $\{z \geq a\}$, $dH = h'(z)dz$, et $X_H = -h'(z)R$. Ainsi, si γ est une orbite 1-périodique de X_H incluse dans $\{z \geq a\}$, alors elle est incluse dans un $\Sigma \times \{z_0\}$ (car R est tangent à Σ) et donc de la forme $\gamma(t) = (\gamma_0(t), z_0)$, avec $\dot{\gamma}_0(t) = -h'(z_0)R$. D'où, $\tilde{\gamma}(t) = \gamma_0\left(-\frac{t}{h'(z_0)}\right)$ est une caractéristique fermée de Σ .

Réciproquement si $\tilde{\gamma}$ est une caractéristique fermée de Σ d'action T , et s'il existe z_0 tel que $h'(z_0) = T$, alors $\gamma(t) = (\tilde{\gamma}(-Tt), z_0)$ est une orbite 1-périodique de X_H .

De plus, comme $\widetilde{\omega} = d(z\sigma)$,

$$\mathcal{A}_H(\gamma) = \int_{\mathbb{S}^1} -z_0 \gamma_0^* \sigma - h(z_0) = z_0 h'(z_0) - h(z_0).$$

On a donc une correspondance biunivoque entre

- d'une part les caractéristiques fermées de Σ d'action T pour lesquelles il existe $z_0 \leq a$ telle que $h'(z_0) = T$,
- et d'autre part les orbites 1-périodiques de X_H . Celles-ci ont alors pour action $z_0 h'(z_0) - h(z_0)$ avec $h'(z_0) = T$.

2.1.3 Cohomologie de Floer

Rappelons maintenant la construction de la cohomologie de Floer (voir [39]). On choisira désormais des Hamiltoniens adaptés vérifiant $h'(z) = \lambda$ sur un $\{z \geq A\}$, avec $\lambda \notin \mathcal{S}(\Sigma)$. Ainsi, les orbites 1-périodiques de X_H seront toutes contenues dans un compact.

De plus,

$$d\mathcal{A}_H(\gamma)(Y) = \int_{\mathbb{S}^1} g \left(J \frac{\partial \gamma}{\partial t} - JX_H, Y \right),$$

où g est la métrique naturellement associée à ω et $J : g(u, v) = \omega(u, Jv)$. Les trajectoires de gradient négatif de \mathcal{A}_H correspondent donc aux applications $u : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \widetilde{M}$ telles que :

$$\frac{\partial u}{\partial s} = -J \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla H, \forall (s, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1,$$

c'est-à-dire $\bar{\partial}_J u = \nabla H$, si l'on note $\bar{\partial}_J u = \frac{\partial u}{\partial s} + J \frac{\partial u}{\partial t}$.

Ces applications sont appelées *trajectoires de Floer* associées à l'Hamiltonien adapté H . Grâce à la propriété de J -convexité des hypersurfaces, il est démontré (cf [24]) que :

Proposition 2.1.1 *Les trajectoires de Floer ne peuvent être tangentes à l'intérieur des surfaces $\Sigma \times \{z\}$ pour $z \geq 1$.*

En fait la démonstration est faite dans [24] [25] dans le cas où $JX = aR$ avec a constante mais elle s'adapte parfaitement à notre cas où $JX = fR$ avec f une fonction.

Définissons les complexes :

$$C_a^k(H) = \bigoplus_{x \in \mathcal{T}(k, a)} \mathbb{Z}_2 \cdot x$$

où $\mathcal{T}(k, a) = \{x \text{ trajectoire 1-périodique de } X_H, \nu(x, H) = -i_{CZ, H}(x) = k \text{ et } \mathcal{A}_H(x) \geq a\}$ (avec $i_{CZ, H}$ l'indice de Conley-Zehnder).

Pour x et y deux orbites périodiques, on considère l'espace des trajectoires de Floer reliant y à x :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(y, x) &= \mathcal{M}(H, J, y, x) \\ &= \{u : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \widetilde{M}, \bar{\partial} u = \nabla H, \lim_{s \rightarrow -\infty} u = y, \lim_{s \rightarrow +\infty} u = x\} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Afin que ces espaces possèdent une structure de variétés de dimension finie, le linéarisé de l'équation des trajectoires de Floer $D_u \xi = \nabla_s \xi + J_u \nabla_t \xi + \nabla_\xi J_u u_t - \nabla_\xi \nabla H$ (pour $\xi \in u^* TM$) doit être de Fredholm et surjectif. La première propriété sera vérifiée si les orbites 1-périodiques de H sont non-dégénérées ; la surjectivité sera elle vérifiée pour un choix

générique de H et de J .

Sous ces hypothèses, la dimension de $\mathcal{M}(y, x)$ au point u est égale à l'indice de l'opérateur D_u et on montre (voir par exemple [37]) que $\dim \mathcal{M}(y, x) = i_{CZ}(x) - i_{CZ}(y) = \nu(y, H) - \nu(x, H)$.

Chaque trajectoire pouvant être reparamétrisée par une translation de la variable $s \in \mathbb{R}$, on considèrera plutôt : $\widetilde{\mathcal{M}}(y, x) = \mathcal{M}(y, x)/\mathbb{R}$. Ainsi si $\nu(y, H) = \nu(x, H) + 1$, $\dim \widetilde{\mathcal{M}}(y, x) = 0$. Les trajectoires restant toutes dans un compact par J -convexité, on en déduit que $\widetilde{\mathcal{M}}(y, x)$ est compact et que c'est donc un ensemble fini.

Par ailleurs, si $u : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \widetilde{M}$, on définit l'énergie de u :

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{S}^1} \left| \frac{\partial u}{\partial s} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial t} - X_H \right|^2.$$

Si $\lim_{s \rightarrow -\infty} u = y, \lim_{s \rightarrow +\infty} u = x$,

$$\mathcal{A}_H(y) - \mathcal{A}_H(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{\partial}{\partial s} (\mathcal{A}_H(u(s, \cdot))) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{S}^1} -\tilde{\omega} \left(\frac{\partial u}{\partial t} - X_H, \frac{\partial u}{\partial s} \right)$$

et on remarque donc que

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{S}^1} \left| \frac{\partial u}{\partial s} + J \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla H \right|^2 ds dt + \mathcal{A}_H(y) - \mathcal{A}_H(x).$$

Ainsi, le minimum d'énergie des trajectoires reliant y à x est atteint précisément par les trajectoires de Floer (qui vérifient par définition $\frac{\partial u}{\partial s} + J \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla H = 0$), c'est-à-dire par les éléments de $\mathcal{M}(y, x)$. Et finalement si $u \in \mathcal{M}(y, x)$:

$$\begin{aligned} E(u) = \mathcal{A}_H(y) - \mathcal{A}_H(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{S}^1} \left| \frac{\partial u}{\partial s} \right|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{S}^1} \left| \frac{\partial u}{\partial s} - X_H \right|^2 \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{S}^1} \left| \frac{\partial u}{\partial s} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial s} - X_H \right|^2. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Ainsi s'il existe une trajectoire de Floer entre y et x , $\mathcal{A}_H(y) \geq \mathcal{A}_H(x)$.

On peut donc définir la différentielle ∂ par : si $x \in C_a^k(H)$,

$$\partial x = \sum_{y \in C_a^{k+1}(H)} \text{Card}(\widetilde{\mathcal{M}}(y, x)) \cdot y$$

Et si on pose

$$C^k(H, a, b) = C_a^k(H) / C_b^k(H),$$

la différentielle $\partial : C^k(H, a, b) \rightarrow C^{k+1}(H, a, b)$ est bien définie. De plus, on vérifie (non trivial voir [39]) que $\partial \circ \partial = 0$.

On peut donc définir la cohomologie de Floer de H , notée $FH^*(H, a, b)$, comme étant les groupes de cohomologie du complexe $(C^*(H, a, b), \partial)$.

Commençons par faire quelques remarques.

1. Par définition de $C^*(H, a, b)$ comme quotient, si $a < b < c$, on a la suite exacte longue (provenant de la suite exacte courte naturelle sur les complexes) :

$$FH^*(H, b, c) \rightarrow FH^*(H, a, c) \rightarrow FH^*(H, a, b) \xrightarrow{\partial^*} FH^{*+1}(H, b, c) \rightarrow \quad (2.4)$$

2. si $H_0 \leq H_1$, alors $\mathcal{A}_{H_0} \geq \mathcal{A}_{H_1}$ et en considérant un chemin croissant (H_t) (et des "trajectoires de Floer" pour ce chemin) on construit un morphisme $C_a^k(H_1) \rightarrow C_a^k(H_0)$ commutant avec ∂ et on montre donc qu'il existe un morphisme $\Phi_{H_1, H_0} : FH^*(H_1, a, b) \rightarrow FH^*(H_0, a, b)$ (pour toutes valeurs a et b).
3. On a fait cette construction pour $H \in C^\infty$ et générique. Toutefois, on remarque que si ni a ni b ne sont des actions d'orbites de H_0 et H_1 , et si H_0 et H_1 sont suffisamment C^0 -proches, alors Φ_{H_1, H_0} est un isomorphisme entre $FH^*(H_1, a, b)$ et $FH^*(H_0, a, b)$. Ainsi, si K est un Hamiltonien continu, on peut définir :

$$FH^*(K, a, b) = \lim_{H \rightarrow K, HC^\infty} FH^*(H, a, b)$$

Pour λ fixé, considérons les Hamiltoniens K_λ valant 0 sur M , et $\lambda(z-1)$ sur $\Sigma \times [1, \infty[$. Ses orbites sont

- d'un côté les orbites constantes de M d'action nulle,
- de l'autre les orbites associées aux caractéristiques fermées de Σ d'action $T \in [T_0, \lambda]$.

En effet, on peut approcher K_λ par des Hamiltoniens lisses $K_{\lambda,\epsilon}$, obtenus à partir de K_λ en lissant sur $[1-\epsilon, 1+\epsilon]$. Ces Hamiltoniens ont pour orbites, en plus des orbites constantes de M , celles associées aux caractéristiques fermées de Σ d'action $zT - h_{\lambda,\epsilon}(z)$ avec $z \in [1-\epsilon, 1+\epsilon]$ vérifiant $h'_{\lambda,\epsilon}(z) = T$ (et donc $T \in [T_0, \lambda]$). Cette action tend vers T quand ϵ tend vers 0 (car z tend vers 1 et $h_{\lambda,\epsilon}(z)$ tend vers 0).

Pour tout $\lambda > \lambda'$ on a un morphisme $\Phi_{\lambda,\lambda'} : FH(K_\lambda) \rightarrow FH(K_{\lambda'})$, vérifiant les règles de composition habituelles; on peut donc définir la cohomologie de Floer de M comme une limite projective :

Définition-Théorème 2.1.1 *On définit pour $a < b$ la cohomologie de Floer de M entre les valeurs a et b comme étant la limite projective des cohomologies de Floer des K_λ entre ces valeurs :*

$$FH^*(M, a, b) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} FH^*(K_\lambda, a, b)$$

et la cohomologie de Floer de M est définie par :

$$FH^*(M) = \lim_{b \rightarrow \infty} FH^*(M, -\delta, b), \text{ où } \delta > 0 \text{ (quelconque car pas d'orbites d'action } < 0). \quad (2.5)$$

C'est un invariant symplectique, indépendant du choix de la structure pseudo-complexe J et invariant par déformation symplectique (ω_t) .

Par la suite on sous-entendra souvent le $-\delta$ en notant les cohomologies de Floer tronquées (qui interviendront souvent dans la suite de l'étude) : $FH^*(M, b) = FH^*(M, -\delta, b)$ (et ce afin d'alléger les notations).

Notons que la définition 2.5 a bien un sens : vu (2.4) pour $b > b'$, on avait pour tout λ un morphisme $FH^*(K_\lambda, -\delta, b) \rightarrow FH^*(K_\lambda, -\delta, b')$. On a donc pour tout $b > b'$ un morphisme $FH^*(M, -\delta, b) \rightarrow FH^*(M, -\delta, b')$, et on peut donc définir la cohomologie de Floer comme la limite projective (2.5).

Le résultat de ce théorème est lui prouvé par exemple dans [39].

Une fois encore nous pouvons faire plusieurs remarques. Tout d'abord, notons qu'intuitivement on peut voir la cohomologie de Floer comme étant engendrée

- d'une part par les orbites constantes (d'une petite fonction de Morse) à l'intérieur de M dont l'action est proche de zéro,
- de l'autre par les caractéristiques fermées de $\Sigma = \partial M$ dont l'action est la période est donc strictement positive (éventuellement seulement celles d'action plus petite que λ si on regarde la cohomologie tronquée $FH^*(M, \lambda)$).

Ainsi si on regarde la cohomologie tronquée à δ où δ est petit (c'est-à-dire si on ne conserve que les orbites d'action proche de zéro) on constate :

Proposition 2.1.2 *Si M^{2n} est une variété symplectique de dimension $2n$, pour tout δ suffisamment petit,*

$$H^{*+n}(M, \partial M) \simeq FH^*(M, -\delta, \delta) \simeq FH^*(K_\lambda, -\delta, \delta).$$

En fait, si on note $\mathcal{S}(\Sigma)$ le spectre de Σ et $T_0 = \min(\mathcal{S}(\Sigma))$, le résultat ci-dessus est vrai pour $\delta < T_0$.

Dém. : Si on approche K_λ par un Hamiltonien lisse H qui soit une petite fonction de Morse sur M , les seules orbites 1-périodiques de H d'action inférieures à δ sont les points critiques de la fonction de Morse.

Or on vérifie (voir [36] ou [37]) que dans ce cas-là l'indice de Conley-Zehnder d'un tel point critique $x : i_{CZ}(x) = n - \text{ind}_{\text{Morse}}(x, -H)$, soit $n + \nu(x, H) = \text{ind}_{\text{Morse}}(x, -H)$. De plus sur M les trajectoires de Floer coïncident avec les trajectoires de Morse de la fonction $-H$ (c'est-à-dire les champs de gradient de ∇H). On en déduit donc que $FH^*(M)(H, -\delta, \delta) \simeq H_{\text{Morse}}^{*+n}(-H)$.

Or, on prouve ([34]) que dans le cas de variétés compactes à bord, si f est une fonction de Morse dont le champ de gradient négatif $-\nabla f$ pointe vers l'extérieur le long du bord, alors la cohomologie de Morse de f coïncide avec la cohomologie usuelle de M modulo son bord : $H_{\text{Morse}}^*(f) \simeq H^*(M, \partial M)$. En appliquant ceci à $f = -H$ on obtient le résultat souhaité. ■

On remarque également que :

Proposition 2.1.3 *Pour $\lambda > \mu$,*

$$FH^*(K_\mu, -\delta, \infty) \simeq FH^*(K_\mu, -\delta, \mu) \simeq FH^*(K_\lambda, -\delta, \mu) \simeq FH^*(M, -\delta, \mu) \quad (2.6)$$

et ainsi,

$$FH^*(M) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} FH^*(K_\lambda, -\delta, \infty), \quad (2.7)$$

En effet, les orbites 1-périodiques de K_λ (resp. K_μ) sont associées biunivoquement aux caractéristiques fermées d'action inférieure à λ (resp. μ). Si on se restreint à celles d'action plus petites que μ , on obtient bien les deux premiers isomorphismes de (2.6). Comme par définition $FH^*(M, -\delta, \mu) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} FH^*(K_\lambda, -\delta, \mu)$, on a bien le dernier isomorphisme de (2.6) : la limite est en fait une égalité à partir de $\lambda = \mu$ (la suite est à partir de là stationnaire).

De plus $FH^*(M, -\delta, \mu) = FH^*(K_\mu, -\delta, \infty)$ et on a donc (2.7).

La cohomologie de Floer du disque muni de sa structure symplectique standard a été calculée pour la première fois dans [16]) ; mais on peut également se référer à [24] [25] ou trouver une preuve alternative intéressante dans [34]. L'idée est que les caractéristiques de $\mathbb{S}^{2n-1}(r)$ sont les grands cercles d'action πr^2 et leurs multiples d'action $k\pi r^2$ pour $k \geq 1$. Mais elles sont dégénérées et apparaissent sous forme de familles paramétrées par \mathbb{S}^{2n-1} . Toutefois, grâce à une perturbation adaptée, on parvient à transformer chacune de ces familles d'orbite en deux orbites non-dégénérées, la différence des indices de Conley-Zehnder de ces deux orbites étant égales à $\dim \mathbb{S}^{2n-1} = 2n - 1$. On trouve alors notamment en degré n et $n + 1$:

Exemple 2.1.1

$$FH^n(\mathbb{B}^{2n}(r), a, b) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{si } a < 0 < b < \pi r^2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$FH^{n+1}(\mathbb{B}^{2n}(r), a, b) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{si } 0 < a < \pi r^2 < b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi, $FH^n(B^{2n}(r)) = 0$. Et plus généralement $FH^*(B^{2n}(r)) = 0$.

On peut donc en déduire celle du disque munie de sa forme symplectique hyperbolique, ou plus précisément (cela n'est pas une variété compacte), pour tout $r < 1$, on peut en déduire l'homologie de Floer de tout disque $\mathbb{B}^{2n}(r) \subset (\mathbb{D}^{2n}, \omega_{\text{hyp}})$. En effet, si on note $\alpha_0 = \frac{1}{2}\langle iz, \cdot \rangle$ la 1-forme "canonique" vérifiant $d\alpha_0 = \omega_0$, alors on remarque que $\omega_{\text{hyp}} = d\alpha_h$ avec $\alpha_h = \frac{\alpha_0}{1-|z|^2}$. Ainsi $(\mathbb{B}^{2n}(r), \omega_0)$ et $(\mathbb{B}^{2n}(r), \omega_h)$ vont avoir les mêmes orbites de Reeb sur leur bord mais les actions des secondes seront égales à celles des premières multipliées par $\frac{1}{1-r^2}$.

Ainsi obtient :

Lemme 2.1.1

$$FH^n(\mathbb{B}^{2n}(r), a, b, \omega_{\text{hyp}}) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{si } a < 0 < b < \pi \frac{r^2}{1-r^2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$FH^{n+1}(\mathbb{B}^{2n}(r), a, b) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{si } 0 < a < \pi \frac{r^2}{1-r^2} < b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En écrivant (2.4) pour $H = K_\lambda$ et en faisant tendre $\lambda \rightarrow \infty$, on obtient la suite exacte longue pour tout $a < b < c$:

$$FH^*(M, b, c) \rightarrow FH^*(M, a, c) \rightarrow FH^*(M, a, b) \xrightarrow{\partial^*} FH^{*+1}(M, b, c) \rightarrow \quad (2.8)$$

Au vu de la proposition 2.1.2, avec $a = -\delta$, $b = \delta$ et $c = \mu$, (2.8) se lit :

$$FH^*(M, \delta, \mu) \rightarrow FH^*(M, -\delta, \mu) \rightarrow H^{*+n}(M, \partial M) \xrightarrow{\partial^*} FH^{*+1}(M, \delta, \mu) \rightarrow \quad (2.9)$$

En faisant tendre μ vers l'infini, on obtient une suite exacte longue reliant la cohomologie de Floer à la cohomologie usuelle de M modulo son bord : pour tout $\delta > 0$ petit,

$$FH^*(M, \delta, \infty) \rightarrow FH^*(M) \rightarrow H^{*+n}(M, \partial M) \xrightarrow{\partial^*} FH^{*+1}(M, \delta, \infty) \rightarrow$$

On note c_M^* l'application entre $FH^*(M)$ et $H^*(M, \partial M)$. Elle correspond intuitivement au fait de ne garder que les orbites d'action proche de zéro. De plus cette application mesure le défaut de $FH^*(M)$ pour être égal à l'invariant purement topologique $H^*(M, \partial M)$. C'est l'idée de la définition de l'hyperbolicité symplectique :

2.2 Hyperbolicité symplectique et capacité

Rappelons que dans le cas d'une variété compacte sans bord, on peut de façon similaire définir les groupes de (co)homologie de Floer $FH^*(M)$ et on sait que dans ce cas-là (en utilisant l'homologie de Morse de la variété) ils sont isomorphes aux groupes de cohomologie usuels $H^{*+n}(M)$. Dans le cas d'une variété à bord, nous avons vu que nous avons une suite exacte longue reliant les groupes de cohomologie de Floer et les groupes de cohomologie de M modulo son bord :

$$FH^*(M, \delta, \infty) \rightarrow FH^*(M) \xrightarrow{c_M^*} H^{*+n}(M, \partial M) \xrightarrow{\partial^*} FH^{*+1}(M, \delta, \infty) \rightarrow \quad (2.10)$$

Mais a priori, $c_M^* : FH^*(M) \rightarrow H^{*+n}(M, \partial M)$ n'est pas un isomorphisme. Il est donc intéressant de s'intéresser au "manque" de cette application pour être un isomorphisme et par-là au "manque" des groupes de cohomologie de Floer pour être des invariants purement topologiques, ce qui correspond donc aux informations symplectiques non topologiques transportées par la cohomologie de Floer. C'est ce qui motive la définition de l'hyperbolicité symplectique.

2.2.1 Hyperbolicité symplectique des variétés compactes à bord de type contact

Tout d'abord dans le cas de variétés compactes à bord de type contact on définit :

Définition 2.2.1 Soit (M, ω) une variété symplectique compacte à bord de type contact. On dit qu'elle est **symplectique hyperbolique** si $c_M = c_M^n : FH^n(M) \rightarrow H^{2n}(M, \partial M)$ est surjective.

C. Viterbo dans [39] avait introduit cette notion de non hyperbolicité symplectique sous le nom de *conjecture algébrique de Stein forte (SAWC)*; en effet cette propriété implique clairement l'existence de caractéristiques fermées sur le bord (en effet si la cohomologie de Floer n'est pas isomorphe à la cohomologie de la variété, l'ensemble des orbites périodiques ne se réduit pas aux constantes à l'intérieur; plus précisément, de la suite exacte longue (2.10), on déduit que si c_M^n n'est pas surjective, alors ∂^n est non nulle et donc $FH^{n+1}(M, \delta, \infty)$ non réduit à $\{0\}$).

Il exhibe plusieurs exemples de variétés compactes à bord non symplectique hyperboliques. Citons tout d'abord l'exemple le plus simple, qui résulte immédiatement du calcul de la cohomologie du disque, exemple 2.1.1 :

Exemple 2.2.1 Le disque $(\mathbb{D}^{2n}(r), \omega_0)$ n'est pas symplectique hyperbolique. (Remarque : pour $r < 1$ les disques $\mathbb{D}^{2n}(r), \omega_{\text{hyp}} \subset (\mathbb{D}^{2n}, \omega_{\text{hyp}})$ ne le sont pas non plus.)

Le domaine $(\mathbb{D}^{2n}(r), \omega_0)$ est un cas particulier de domaine de Stein sous-critique. Rappelons qu'une variété (resp. domaine) de Stein (W, J) est dit **sous-critique** si dans la définition on peut choisir pour ψ une fonction de Morse dont tous les points critiques ont un indice $\text{ind} < \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{R}} W$. Or on a plus généralement (voir [39]) :

Proposition 2.2.1 Un domaine de Stein sous-critique n'est pas symplectique hyperbolique.

Lors de son étude, C. Viterbo a construit pour $W \subset M$ sous-domaine à bord de type contact restreint dans M , un morphisme, dit morphisme de transfert (associé à l'inclusion j), entre $FH^*(W)$ et $FH^*(M)$. De plus ce morphisme commute avec les applications c^* . Ainsi on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} FH^*(W) & \xrightarrow{c_W^*} & H^{*+n}(W, \partial W) \\ F_j^* \downarrow & & \downarrow j^{*+n} \\ FH^*(M) & \xrightarrow{c_M^*} & H^{*+n}(M, \partial M) \end{array}$$

Le morphisme j^{2n} est un isomorphisme si W est connexe (ou au moins surjectif sinon). On en déduit donc :

Proposition 2.2.2 Soit (M, ω) une variété compacte à bord de type contact et $W \subset M$ un ouvert ω -convexe dans M . Dans ce cas, si c_M^n n'est pas surjective, alors c_W^n n'est pas surjective. En d'autres termes, si (W, ω) est symplectique hyperbolique, alors (M, ω) est symplectique hyperbolique

2.2.2 Homologie de Floer de variétés ouvertes et hyperbolicité symplectique forte

On souhaiterait étendre la notion d'hyperbolicité symplectique, pour l'instant défini pour les variétés compactes à bord de type contact, à un cadre plus général. Le cadre pour lequel cela est naturel est celui des variétés ω -convexes.

Pour commencer, notons que si l'on considère une variété ouverte ω -convexe, comme elle s'écrit comme l'union croissante de domaines compacts ω -convexes, on peut définir sa cohomologie de Floer comme la limite projective : $FH(W)$ et $FH(W')$ pour tout $W \subset W' \subset M$:

$$FH^*(M) = \lim_{W \subset M} FH^*(W) = \lim_{W \subset M} \lim_{\mu \rightarrow \infty} FH^*(W, \mu) \quad (2.11)$$

Cela est naturel étant donné le morphisme de transfert qui existe entre $FH^*(W)$ et $FH^*(W')$ pour tout $W \subset W' \subset M$.

On a alors, pour tout $W \subset M$, un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} FH^*(W) & \xrightarrow{c_W^*} & H^{*+n}(W, \partial W) \\ F_j^* \downarrow & & \downarrow j^{*+n} \\ FH^*(M) & \xrightarrow{c_M^*} & H^{*+n}(M, \partial M) \end{array}$$

D'après les résultats sur la cohomologie de Floer des boules euclidiennes, on a $F(\mathbb{C}^n) = 0$.

Toutefois remarquons que l'on pourrait de même définir les homologies de Floer partielles $FH^*(M, \mu) := FH^*(M, \delta, \mu)$ comme la limite projective : $FH^*(M, \mu) = \lim_{W \subset M} FH^*(W, \mu)$. Mais, comme le montre alors l'exemple de \mathbb{C}^n , avec ces définitions, on n'a alors pas $FH^*(M) = \lim_{\mu \rightarrow \infty} FH^*(M, \mu)$! En effet

$$\mathbb{Z}_2 = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow \infty} FH^n(\mathbb{B}^{2n}(r), \mu) \neq \lim_{r \rightarrow \infty} \lim_{\mu \rightarrow \infty} FH^n(\mathbb{B}^{2n}(r), \mu) = 0 \dots$$

Soulignons donc bien que la définition habituelle est $FH^*(M) = \lim_{W \subset M} \lim_{\mu \rightarrow \infty} FH^*(W, \mu)$ et non pas $\lim_{\mu \rightarrow \infty} \lim_{W \subset M} FH^*(W, \mu)$. Mais, notamment en raison de cette ambiguïté, la cohomologie de Floer des variétés ouvertes est très peu utilisée.

La première façon naturelle d'étendre la notion d'hyperbolicité symplectique aux variétés ω -convexes ouvertes est de définir :

Définition 2.2.2 (hyperbolicité symplectique forte) Soit (M, ω) une variété symplectique non compacte ω -convexe. On dit qu'elle est **fortement symplectique hyperbolique** s'il existe un ouvert relativement compact $W \subset M$ ω -convexe, tel que (W, ω) soit symplectique hyperbolique au sens de la définition 2.2.1.

Notons qu'alors pour tout ouvert relativement compact ω -convexe W' tel que $W \subset W' \subset M$, (W', ω) est symplectique hyperbolique au sens de la définition 2.2.1.

Et en particulier, si M est fortement symplectique hyperbolique, alors (au vu du diagramme commutatif ci-dessus incluant c_M^* et c_W^*) le morphisme $c_M^* : FH^n(M) \rightarrow H^{2n}(M, \partial M)$ est surjectif.

Remarquons également que cette définition est bien équivalente à la notion initiale dans le cas de

variétés compactes à bord (dans ce cas-là, il suffit de prendre pour W la variété M elle-même). enfin soulignons que si (M, ω) n'est pas fortement symplectique hyperbolique, alors pour tout ouvert relativement compact ω -convexe $W \subset M$, (W, ω) n'est pas symplectique hyperbolique.

Si l'on considère les exemples fondamentaux, il est clair que les plans complexes \mathbb{C}^n ne sont pas fortement symplectique hyperboliques. Toutefois, la boule hyperbolique $(\mathbb{D}^{2n}, \omega_{\text{hyp}})$ n'est pas fortement symplectique hyperbolique non plus. Or, il serait peu satisfaisant que la boule hyperbolique ne soit pas symplectique hyperbolique. Cette propriété est donc un peu trop forte, un peu trop contraignante. Voilà l'une des raisons pour lesquelles j'ai choisi de nommer cette propriété "forte symplectique hyperbolicité". Nous allons donc introduire de nouvelles définitions, plus faibles, et ainsi plus satisfaisantes de l'hyperbolicité (de sorte que le disque hyperbolique soit symplectique hyperbolique et que \mathbb{C}^n ne le soit pas).

Or les cohomologies de Floer des boules incluses dans \mathbb{C}^n (données exemple 2.1.1) et de celles incluses dans le disque hyperbolique \mathbb{D}^{2n} (données lemme 2.1.1) semblent au premier abord assez similaires. La différence réside en fait dans la valeur "frontière" : πr^2 pour $(\mathbb{B}^{2n}(r), \omega_0)$, $\pi \frac{r^2}{1-r^2}$ pour $(\mathbb{B}^{2n}(r), \omega_{\text{hyp}})$. Cette valeur, que nous appellerons dans le cas général "capacité" (nous la définirons plus précisément dans la partie suivante) mesure l'hyperbolicité (ou plutôt la non-hyperbolicité) de domaines compacts et sera à la base de la définition d'hyperbolicité symplectique (qui nous permettra de distinguer \mathbb{C}^n de \mathbb{D}^{2n}).

Mais auparavant soulignons que d'après l'exemple 2.2.1 et la proposition 2.2.1,

Proposition 2.2.3 *Toute variété de Stein sous-critique, et en particulier les variétés \mathbb{C}^n ne sont pas fortement symplectique hyperboliques.*

Dém. : Tout domaine compact V d'une variété de Stein (W, ω, J, ψ) est inclus dans un domaine de Stein $W_c = \{\psi \leq c\}$ qui n'est pas symplectique hyperbolique d'après la proposition 2.2.1. Et donc, V n'est pas symplectique hyperbolique. ■

Revenons au cas d'une variété compacte à bord. Par définition, dans ce cas-là, la cohomologie de Floer $FH^*(M)$ est la limite projective :

$$FH^*(M) = \lim_{\mu \rightarrow \infty} FH^*(M, \mu),$$

et on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} FH^*(M) & \longrightarrow & FH^*(M, \mu) \\ & \searrow c_M^* & \downarrow c_\mu^* \\ & & H^{*+n}(M, \partial M) \end{array}$$

Il est donc naturel d'introduire la quantité (suivante que nous avons appelé plus haut, dans notre discussion sur le cas du plan complexe et du disque hyperbolique, "valeur frontière") "mesurant" l'hyperbolicité symplectique, ou plutôt la (non) hyperbolicité symplectique :

2.2.3 Capacité symplectique naturellement associée

Définition 2.2.3 *Soit (M, ω) une variété symplectique compacte à bord de type contact. On définit :*

$$\mu(M) = \inf \{ \mu \mid FH^n(M, \mu) \xrightarrow{c_\mu^n} H^{2n}(M, \partial M) \text{ n'est pas surjective} \} \in \mathbb{R}_+$$

On peut dire qu'elle "mesure" la non-hyperbolicité symplectique de la variété dans le sens où :

Proposition 2.2.4 *Une variété symplectique compacte à bord (M, ω) est symplectique hyperbolique ssi $\mu(M) = \infty$.*

Dém. : En raison du diagramme commutatif ci-dessus, il est clair que si $\mu(M) < \infty$, alors il existe $\mu < \infty$ tel que c_μ^n n'est pas surjectif, et donc c_M^n n'est pas surjective, c'est-à-dire M n'est pas symplectique hyperbolique.

Réciproquement si M n'est pas symplectique hyperbolique, alors c_M^n n'est pas surjective, et donc d'après la suite exacte (2.10) $\partial^n : H^{2n}(M, \partial M) \rightarrow FH^{n+1}(M, \delta, \infty)$ n'est pas nulle, i.e. si on note $[x_0]$ l'élément engendrant $FH^n(-\delta, \delta)^1 \simeq H^{2n}(M, \partial M) \simeq \mathbb{Z}_2$, $\partial^n[x_0] \neq 0$. Si x_0 est un représentant de $[x_0]$ dans $C^n(-\delta, \delta)$ (et plus précisément dans $\text{Ker } \partial|_{C^n(-\delta, \delta)}$), il possède un antécédent $x'_0 \in C^n(-\delta, \infty)$ via la projection $C^n(-\delta, \infty) \rightarrow C^n(-\delta, \delta)$. Et notons $z_0 = \partial x'_0 \in C^{n+1}(\delta, \infty) \subset C^{n+1}(-\delta, \infty)$. Alors $\partial^n[x_0] = [z_0] \in FH^{n+1}(\delta, \infty)$ et donc, comme par hypothèse $\partial^n[x_0] \neq 0$, $[z_0] \neq 0$.

Or il existe $\mu > 0$ tel que $\mathcal{A}(z_0) < \mu$ (où \mathcal{A} définie initialement sur les orbites est prolongée linéairement sur les complexes C^*). Alors $z_0 \in C^{n+1}(\delta, \mu)$. De plus, si on note $\partial_\mu^n : FH^n(-\delta, \delta,) \rightarrow FH^n(\delta, \mu)$, on vérifie que $\partial_\mu^n[x_0] = [z_0] \in FH^{n+1}(\delta, \mu)$ et ainsi $\partial_\mu^n[x_0] \neq 0$. Comme nous avons la suite exacte longue :

$$FH^n(M, \delta, \mu) \xrightarrow{c_\mu^n} FH^n(M, -\delta, \mu) \rightarrow H^{2n}(M, \partial M) \xrightarrow{\partial_\mu^n} FH^{n+1}(M, \delta, \mu) \rightarrow \quad (2.12)$$

on en déduit que $c_\mu^n : FH^n(M, \delta, \mu) \rightarrow FH^n(M, -\delta, \mu) \rightarrow H^{2n}(M, \partial M)$ n'est pas surjective et que $\mu(M) \leq \mu < \infty$. ■

On déduit de l'expression de la cohomologie de Floer boules munies de la forme symplectique standard, exemple 2.1.1 :

Exemple 2.2.2 *Si ω_0 est la structure symplectique standard de \mathbb{C}^n , on a $\mu(\mathbb{B}^{2n}(r), \omega_0) = \pi r^2$.*

Ainsi, cette quantité μ est bien une capacité. En effet elle est :

$$\begin{cases} \text{Monotone : } \mu(M, \omega) \leq \mu(M', \omega') \text{ s'il existe un plongement symplectique de } (M, \omega) \text{ dans } (M', \omega') \\ \text{Conforme : } \mu(M, \alpha\omega) = |\alpha|\mu(M, \omega) \text{ pour tout } \alpha \neq 0 \\ \text{Non triviale : } \mu(\mathbb{B}^{2n}(r), \omega_0) \neq 0 \text{ et } \mu(\mathbb{B}^{2n_2}(r) \times \mathbb{C}, \omega_0, J_0) \neq \infty \end{cases}$$

La monotonie vient du morphisme de transfert associé à l'inclusion $M \subset M'$. Le caractère conforme est lui évident car si on regarde la forme $\alpha\omega$, le champ de Reeb est multiplié par $\frac{1}{\alpha}$; ainsi les orbites de Reeb sont les mêmes (à une reparamétrisation près) mais leur action est multipliée par $|\alpha|$.

Notons que l'on peut également déduire de l'expression de la cohomologie de Floer des sous-boules de la boule hyperbolique, lemme 2.1.1, leur capacité :

Lemme 2.2.1 *Pour $\mathbb{D}^{2n}(r) \subset \mathbb{D}^{2n}$ ($r < 1$) :*

$$\mu(\mathbb{D}^{2n}(r), \omega_{\text{hyp}}) = \pi \frac{r^2}{1-r^2}$$

¹par $C^*(a, b)$ ou $FH^*(a, b)$ nous désignons d'abord $C^*(H_\lambda, a, b)$ ou $FH^*(H_\lambda, a, b)$ sur lesquels nous travaillons dans un premier temps, puis $C^*(M, a, b)$ ou $FH^*(M, a, b)$ à la limite. Mais nous écrivons $C^*(a, b)$ ou $FH^*(a, b)$ afin de ne pas détailler ces étapes et ce passage à la limite

Rappelons que la boule hyperbolique $(\mathbb{D}^{2n}, \omega_{\text{hyp}}, J_0, \phi)$ avec $\phi(z) = \frac{1}{4} \ln \left(\frac{1}{1-|z|^2} \right)$ est une variété de Stein. Ainsi les sous-ensembles $\mathbb{D}^{2n}(r)$ sont en fait exactement les domaines de Stein $\left\{ \phi \leq \frac{1}{4} \ln \left(\frac{1}{1-r^2} \right) \right\}$. On a donc $\{\phi \leq a\} = \mathbb{D}^{2n}(1 - e^{-4a})$. Et finalement $\mu(\{\phi \leq a\}) = \pi(1 - e^{-4a}) e^{4a}$. La croissance de la capacité en a est donc exponentielle.

Par contre si l'on s'intéresse au cas des plans complexes $(\mathbb{C}^n, \omega_0, J_0, \frac{1}{4}|z|^2)$ (également une variété de Stein), on constate que $\mu(M_a) = 4\pi a$. Ainsi dans ce cas la croissance de la capacité en a est linéaire.

Cela suggère de définir la notion de symplectique hyperbolicité en fonction de la croissance des capacités $\mu(M_a)$ (du moins dans le cas des variétés de Stein). Mais cela soulève donc la question de la croissance de la capacité des sous-ensembles $M_a \subset M$ dans le cas de variétés de Stein M générales. Nous allons voir dans un premier temps que l'on peut en obtenir une estimation. Puis nous définirons la notion d'hyperbolicité symplectique.

2.2.4 Estimation de la capacité dans le cas des variétés de Stein

Soit (M, J, ψ) une variété de Stein (on suppose $\psi \geq 0$, cela est toujours possible quitte à ajouter une constante). Dans cette partie nous allons tenter d'obtenir une estimation de la croissance des capacités des domaines $M_a \subset M$ (dans le cas où M n'est pas fortement symplectique hyperbolique i.e. dans le cas où la fonction croissante $\mu(M_a)$ n'est pas égale à l'infini à partir d'un certain rang). Pour cela nous allons utiliser les propriétés de croissance et de conformalité de la capacité, en trouvant des difféomorphismes conformes de M_a dans un M_{a_0} fixé.

Considérons donc X le champ de gradient de ψ (pour la métrique naturelle $\omega(\cdot, J\cdot)$, où $\omega = dd^c\psi$), et (ϕ_t) le flot associé. On sait que $(\phi_t)^*\omega = e^t\omega$. On suppose dans un premier temps que ce champ est complet en $-\infty$, c'est-à-dire que le flot (ϕ_t) existe pour tout $t \leq 0$, et de plus, qu'il existe $\alpha > 0$ et K un compact tels que $\frac{\|d\psi\|^2}{\psi} \geq \alpha$ sur $W \setminus K$. Choisissons a_0 tel que $K \subset M_{a_0}$.

Alors, $\forall a > a_0$, si $t = \frac{1}{\alpha} \log(\frac{a}{a_0})$, on a $\phi_{-t}(M_a) \subset M_{a_0}$.

En effet, soit $x \in M_a$. Par l'absurde si $\phi_{-t}(x) \notin M_{a_0}$, alors, comme $s \rightarrow \psi(\phi_{-s}(x))$ est décroissante, $\forall s \leq t$, $\phi_{-s}(x) \notin M_{a_0}$ et donc $\phi_{-s}(x) \notin K$. D'où,

$$\ln(\psi(x)) - \ln(\psi(\phi_{-t}(x))) = \int_{-t}^0 \frac{1}{\psi(\phi_s(x))} d\psi_{\phi_s(x)}(X_{\phi_s(x)}) ds = \int_{-t}^0 \frac{|d\psi_{\phi_s(x)}|^2}{\psi} \geq \alpha t.$$

Ainsi, $\psi(\phi_{-t}(x)) \leq \psi(x) e^{-\alpha t} \leq a_0$. On aboutit ainsi à une contradiction.

Or $(\phi_t)_*\omega = e^t\omega$. En effet $\frac{d}{dt}((\phi_t)_*\omega) = (\phi_t)_*(\mathcal{L}_X\omega) = (\phi_t)_*\omega$ (car $dd^c\psi = \omega$ et donc $d(i_X\omega) = \omega$). Finalement pour $t = \frac{1}{\alpha} \log(\frac{a}{a_0})$,

$$\mu(M_a, \omega) = \mu(\phi_{-t}(M_a), e^t\omega) = e^t \mu(\phi_{-t}(M_a), \omega) \leq e^t \mu(M_{a_0}, \omega) = a^{\frac{1}{\alpha}} a_0^{-\frac{1}{\alpha}} \mu(M_{a_0}, \omega).$$

Ainsi,

Proposition 2.2.5 *Si (M, J, ω, ψ) est une variété de Stein, complète en $-\infty$, $\psi \geq 0$, et s'il existe $\alpha > 0$ et K compact tels que $\frac{\|d\psi\|^2}{\psi} \geq \alpha$ sur $W \setminus K$, alors, si (M, ω) est non fortement symplectique hyperbolique (nécessaire pour que la fonction $a \rightarrow M_a$ ne soit pas identiquement égale à l'infini), il existe des constantes $a_0 > 0$ $c > 0$ telles que, pour tout $a > a_0$*

$$\mu(M_a, \omega) \leq ca^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Notons que l'on peut affiner notre estimation. Introduisons pour cela des quantités qui apparaîtront de nouveau dans la suite de notre analyse.

Définition 2.2.4 Si (M, J, ψ) est une variété de Stein (avec $\psi \geq 0$). Posons pour $s > 0$:

$$\begin{aligned}\alpha(s) &= \inf_{\{\sqrt{\psi}=s\}} \frac{|d\psi|^2}{\psi} \quad \text{et} \quad \alpha_0(s) = \inf_{\{\sqrt{\psi}=s\}} \frac{|d\psi|}{\sqrt{\psi}} \\ \beta(s) &= \sup_{\{\sqrt{\psi}=s\}} \frac{|d\psi|^2}{\psi} \quad \text{et} \quad \beta_0(s) = \sup_{\{\sqrt{\psi}=s\}} \frac{|d\psi|}{\sqrt{\psi}}\end{aligned}$$

Notons que dans le cas où la fonction $s \rightarrow \sup_{\psi=s} |\nabla \phi|$ n'est pas croissante (notons que dans les exemples que nous rencontrerons, même si β et α peuvent être décroissantes et même tendre vers 0, cette fonction elle sera croissante), nous définirons plutôt :

$$\beta(s) = \frac{1}{s^2} \sup_{\{\sqrt{\psi} \leq s\}} |d\psi|^2 \quad \text{et} \quad \beta_0(s) = \frac{1}{s} \sup_{\{\sqrt{\psi} \leq s\}} |d\psi|$$

Cette définition coïncide avec celle ci-dessus dès lors que la fonction $s \rightarrow \sup_{\psi=s} |\nabla \phi|$ est croissante mais sera plus appropriée et donc celle que nous adopterons sinon (même si pour des raisons de symétrie avec la définition de α nous avons dans la définition 2.2.4 adopté une écriture différente).

On supposera désormais que ψ n'a qu'un nombre fini de valeurs critiques afin que, pour $a > a_0$, ces fonctions soient continues.

Notons que $\alpha(s) = (\alpha_0(\sqrt{s}))^2$ et $\beta(s) = (\beta_0(\sqrt{s}))^2$. Si nous avons introduit les fonctions α_0 et β_0 en plus des fonctions α et β , c'est parce que, comme nous l'expliquerons à la fin de cette partie, elles sont naturellement reliées aux fonctions de croissance de Polterovich [35].

Alors sur $\{\psi = s\}$, on a $\frac{|d\psi|^2}{\psi} \geq \alpha(s)$. Ainsi, pour $\lambda < 1$, il existe $\delta > 0$ tel que $\frac{|d\psi|^2}{\psi} \geq \lambda \alpha(s)$ sur $\{s - \delta \leq \psi \leq s + \delta\}$. On en déduit alors comme précédemment que $\mu(M_{s+\delta}) \leq \left(\frac{s+\delta}{s}\right)^{\frac{1}{\lambda \alpha(s)}} \mu(M_s)$. D'où

$$(\ln(\mu(M_{s+\delta})) - \ln(\mu(M_s))) \leq \frac{1}{\lambda \alpha(s)} (\ln(s + \delta) - \ln(s)) \leq \frac{1}{\lambda \alpha(s)} \frac{\delta}{s}. \quad (2.13)$$

Si on se fixe $a > a_0$, on peut pour λ fixé trouver un δ uniforme sur tout le segment $[a_0, a]$. En sommant toutes les équations (2.13) obtenues sur une partition de pas inférieur à δ de $[a_0, a]$, puis en prenant la limite pour $\delta \rightarrow 0$, on obtient (comme le terme de droite est une somme de Riemann) :

$$\ln(\mu(M_a)) - \ln(\mu(M_{a_0})) \leq \frac{1}{\lambda} \int_{a_0}^a \frac{1}{\alpha(s)} \frac{ds}{s}.$$

Comme ceci est vrai pour tout $\lambda < 1$, on en déduit finalement :

Proposition 2.2.6 Soient (M, ω, J, ψ) une variété de Stein avec un nombre fini de valeurs critiques, $M_a = \{\psi \leq a\}$, α et β les fonctions définies par la définition 2.2.4. Si (M, ω) est non fortement symplectique hyperbolique, alors il existe une constante c telle que

$$\mu(M_a) \leq c \exp \left(\int_{a_0}^a \frac{1}{\alpha(s)} \frac{ds}{s} \right). \quad (2.14)$$

Et de même :

$$\mu(M_a) \geq c \exp \left(\int_{a_0}^a \frac{1}{\beta(s)} \frac{ds}{s} \right). \quad (2.15)$$

On montre l'inégalité inverse en remplaçant α par β et en inversant les inégalités dans notre démonstration ci-dessus.

Remarque 2.2.1 *Comparaison avec les fonctions croissances de Polterovich*

Ces fonctions α et β (ou α_0 et β_0) “décritent” en un certain sens la géométrie de l'évolution des hypersurfaces $S_a = \{x, \psi(x) = a\}$. Comme je le disais, elles sont reliées aux fonctions de croissance introduites par Polterovich dans [35]. Rappelons-en brièvement la définition. Soient (M, ω) une variété symplectique fermée et $(\tilde{M}, \tilde{\omega})$ son relèvement universel. Pour toute métrique g sur M on peut considérer son relèvement \tilde{g} . Alors, si on se fixe un point $x_0 \in \tilde{M}$, pour toute 1-forme λ sur \tilde{M} telle que $d\lambda = \omega$, on définit la fonction croissance $u_\lambda(s) = \sup_{x \in B(s)} |\lambda_x|$ où $B(s)$

est la boule de centre x_0 et de rayon s pour la métrique \tilde{g} , et où la norme $|\lambda|$ est prise pour cette même métrique. Par compacité, la “classe d'équivalence de croissance” de cette fonction ne dépend pas du choix de g et de x_0 .

Expliquons plus clairement ce que l'on entend par une telle relation d'équivalence (en reprenant la notion introduite par Polterovich).

Définition 2.2.5 *Si u et v sont deux fonctions de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R}_+ , on définit :*

- une relation d'ordre par $u \prec v$ si il existe $c > 0$ tel que $u \leq C v$,
- une relation d'équivalence, par $u \sim v$ si $u \prec v$ et $v \prec u$.

Si $u \sim v$, nous dirons que u et v ont des croissances équivalentes.

On vérifie aisément que pour des choix différents de x_0 et de métrique g , on obtient des fonctions de croissance u_λ et u'_λ qui ont des croissances équivalentes.

On peut ensuite définir la fonction de croissance de M par $u(s) = \sup_{\lambda, d\lambda=\omega} u_\lambda(s)$. Bien-sûr cette

fonction dépend du choix de la métrique g et du point x_0 mais sa classe d'équivalence pour la relation ci-dessus elle n'en dépend pas. Il s'agit donc bien là d'un invariant symplectique.

Rappelons que Polterovich introduit grâce à ces fonctions une notion d'hyperbolicité : il dit que la variété fermée (M, ω) est hyperbolique, nous précisons ici “Polterovich-hyperbolique” si la fonction u est bornée. Par la suite nous étudierons le lien entre cette définition et la notion d'hyperbolicité symplectique que nous introduisons ici.

D'ores et déjà, dans le cas où \tilde{M} est une variété de Stein de la forme $(\tilde{M}, J, \tilde{\omega}, \psi)$, il est naturel de s'intéresser aux liens entre ces fonctions de croissance de Polterovich et les fonctions α_0 et β_0 (ou α et β) que nous avons introduites dans cette partie et qui elle aussi mesurent “la croissance de la géométrie” de la variété. Plus précisément, on sait que $\lambda_0 = d^c\psi$ vérifie $d\lambda_0 = \tilde{\omega}$ et on constate que la définition de u_{λ_0} semble assez similaire à celle de β_0 . Toutefois dans le premier cas on regarde la valeur supérieure de $|\lambda_0| = |d\psi|$ sur les boules $B(s)$, et dans le deuxième cas on regarde sa valeur supérieure sur les domaines $\{\sqrt{\psi} < s\}$. Comparons donc ces deux ensembles.

On montre dans un premier temps que $B\left(\frac{2s}{\beta_0(s)}\right) \subset M_{s^2}$. En effet si $\sqrt{\psi(x)} \geq s$ et si γ est un chemin entre x et x_0 alors

$$s \leq \sqrt{\psi(x)} - \sqrt{\psi(x_0)} = \int_\gamma \frac{d\psi}{2\sqrt{\psi}} \leq \frac{\beta_0(s)}{2} \text{longueur}(\gamma) \text{ et } B\left(\frac{2s}{\beta_0(s)}\right) \subset M_{s^2}. \quad (2.16)$$

Ainsi $u\left(\frac{2s}{\beta_0(s)}\right) \leq \sup_{M_{s^2}} |d\psi| = s \frac{1}{s} \sup_{\{\sqrt{\psi}leqs\}} |d\psi| = s \beta_0(s)$.

On peut donc à partir d'une majoration de β_0 (ou β donc) déduire une majoration de u . Par exemple si β est majorée par une constante, soit $\beta \prec 1$ avec les notations ci-dessus, alors on en déduit que $u \prec s$ (il existe une constante telle que $u(s) \leq Cs$).

Plus généralement si $\beta_0 \prec s^\delta$ avec $\delta < 1$ alors il existe une constante telle que $\frac{2s}{\beta_0(s)} \geq Cs^{1-\delta}$, et donc $u(Cs^{1-\delta}) \leq c's^{1+\delta}$ et finalement on en déduit que $u(s) \prec s^{\frac{1+\delta}{1-\delta}}$.

Par exemple dans le cas du disque hyperbolique $(\mathbb{D}, \omega_{\text{hyp}}, J_0)$, nous avons vu dans l'exemple 1.2.3 que la fonction psh canonique était $\phi = \frac{1}{4} \ln \left(\frac{1}{1-|z|^2} \right)$. Un calcul simple montre que $|d\phi| = \frac{1}{2}|z|$.

Ainsi comme $\phi = s$ si et seulement si $|z|^2 = 1 - e^{-4s}$, on vérifie que $\beta_0(s) = \frac{\sqrt{1-e^{-4s^2}}}{s} \prec s^{-1}$. On retrouve donc ainsi que pour le disque hyperbolique la fonction u est bornée (et donc que le disque est Polterovich hyperbolique).

Réciproquement, dans le cas où α est minorée par une constante, $\alpha_0 \geq C$, alors si $\gamma(t)$ est le flot de $\frac{\nabla \psi}{|\nabla \psi|}$, joignant un point x_0 à un point x , on a

$$\sqrt{\psi(x)} - \sqrt{\psi(x_0)} = \int_{\gamma} \frac{1}{2\sqrt{\psi}} |d\psi| \geq \frac{C}{2} \text{longueur}(\gamma) \geq \frac{C}{2} d(x, x_0)$$

On en déduit qu'il existe une constante C telle que

$$M_{s^2} \subset \mathbb{B}(Cs)$$

Ainsi finalement (par le même raisonnement que ci-dessus) $u_{d^c\psi}(Cs) \geq s \beta_0(s)$.

Par contre a priori on ne peut en général rien dire sur la fonction u elle-même.

2.2.5 Symplectique hyperbolicité

D'après les définitions introduites dans la partie 2.2.2, dans le cas non compact, une variété symplectique est symplectique hyperbolique si elle possède un domaine compact dont la capacité μ est infini. Toutefois si l'on étend notre définition de μ aux variétés non compactes en posant

$$\mu(M, \omega) = \sup_{\substack{N \subset M \\ \text{compact } \omega\text{-convexe}}} \mu(N, \omega)$$

alors si M est fortement symplectique hyperbolique nécessairement $\mu(M) = \infty$, mais on peut avoir $\mu(M) = \infty$ et M non fortement symplectique hyperbolique. En effet, cela sera le cas, s'il existe une suite de $M_j \subset M$ compacts tels que $\mu(M_j) \rightarrow \infty$. Ainsi, comme nous l'avons déjà souligné, nous sommes amenés à adopter une définition de l'hyperbolicité symplectique qui prenne en compte la croissance des $\mu(M_j)$.

Définition 2.2.6 (Hyperbolicité symplectique) Soit M une variété ω -convexe, plus la capacité des domaines compacts de M croît rapidement, plus M est symplectique hyperbolique.

Et si la suite des $\mu(M_j)$ est stationnaire égale à

l'infini à partir d'un certain rang, M est fortement symplectique hyperbolique (définition 2.2.2).

Cette définition qualitative est claire, mais, d'un point de vue quantitatif, la question est de

savoir à quelle quantité l'on compare la croissance des $\mu(M_j)$. Dans le cas de variétés non compactes, toute définition plus "quantitative" que l'on pourra donner dépendra du choix de cette quantité. Toutefois, dans le cas de variété compacte on verra que l'on peut donner une définition complètement intrinsèque de l'hyperbolicité symplectique.

Dans le cas particulier des variétés de Stein, les M_j que l'on considère naturellement sont les $M_a = \{\psi \leq a\}$ et il est donc naturel d'étudier la croissance en a de leur capacité. Etant donnée l'étude ci-dessus (et notre remarque à propos de la croissance des capacités dans le cas de \mathbb{C}^n et du disque hyperbolique), dans ce cas-là, la croissance linéaire en a apparaît comme une "croissance-limite" naturelle et une hypothèse de symplectique hyperbolicité pourra s'écrire :

Exemple 2.2.3 Soit (M, ω, J, ψ) une variété de Stein. On dit que M est **Stein-symplectique hyperbolique** (*S-symplectique hyperbolique*), si (avec comme d'habitude $M_a = \{\psi \leq a\}$)

$$\frac{\mu(M_a)}{a} \rightarrow \infty$$

Ainsi M est non *S-symplectique hyperbolique* si il existe une suite échaustive (a_n) telle que $\mu(M_{a_n}) = O(a_n)$ i.e. pour laquelle la croissance des capacités est linéaire en a .

Avec cette définition on a :

Lemme 2.2.2 (\mathbb{C}^n, ω_0) est non *S-symplectique hyperbolique*.

Le disque hyperbolique $(\mathbb{D}^{2n}, \omega_{\text{hyp}})$ est *S-symplectique hyperbolique*.

Et plus généralement vu les estimations de la partie 2.2.4 :

Lemme 2.2.3 Si (M, ω, J, ψ) est une variété de Stein et que (M, ω) est non fortement symplectique hyperbolique alors :

- s'il existe $\alpha \geq 1$ et K compact tels que $\frac{\|d\psi\|^2}{\psi} \geq \alpha$ sur $W \setminus K$ alors M est non *S-symplectique hyperbolique*.
- s'il existe $\beta < 1$ et K compact tels que $\frac{\|d\psi\|^2}{\psi} \leq \beta$ sur $W \setminus K$ alors M est *S-symplectique hyperbolique*.

Pour des variétés symplectiques ω -convexes quelconques, la première grandeur naturelle avec laquelle on peut comparer la croissance des capacités des domaines est la "taille" de ceux-ci pour une métrique riemannienne fixée. Mais, cela demande de restreindre l'ensemble des métriques riemanniennes permises (en effet sinon on pourrait évidemment rendre non symplectique hyperbolique une variété symplectique hyperbolique et inversement en multipliant la métrique par une fonction positive "très petite" ou "très grande"). Ainsi par exemple (de manière similaire à 2.2.3 pour les variétés de Stein) une hypothèse d'hyperbolicité symplectique pourra s'écrire :

Exemple 2.2.4 Soit (M, ω) une variété symplectique munie d'une métrique Riemannienne g compatible avec ω (i.e. telle que $|\omega|_g = 1$ sur M , ce qui sera le cas pour toute métrique pseudo-Kähler). On dit qu'elle est *g-symplectique hyperbolique* si pour toute suite croissante (M_j) de domaines ω -convexes (et $x_0 \in M_0$),

$$\frac{\mu(M_j)}{d_g^2(x_0, \partial M_j)} \rightarrow \infty$$

Ainsi M est non *g-symplectique hyperbolique* s'il existe une suite de domaines ω -convexes tels que $\mu(M_j) = O(d_g^2(x_0, \partial M_j))$, i.e. tels que la croissance de la capacité des M_j est linéaire en le diamètre au carré des M_j (pour la métrique g).

Il est naturel de comparer la capacité à la distance au carré et non pas à la distance pour des raisons de "dimensions" (la capacité étant un invariant bidimensionnel).

Dans le cas de variétés compactes on peut définir une notion d'hyperbolicité symplectique ne dépendant que de la structure symplectique (indépendante d'un quelconque choix de métrique) :

Définition 2.2.7 Soit (M, ω) une variété symplectique compacte dont le revêtement universel $(\tilde{M}, \tilde{\omega})$ est ω -convexe. On dit qu'elle est **symplectique hyperbolique** si pour une (ou, c'est équivalent, pour toute) métrique riemannienne g sur M de relevé \tilde{g} sur \tilde{M} , $(\tilde{M}, \tilde{\omega})$ est \tilde{g} -symplectique hyperbolique.

On dit qu'elle est **fortement symplectique hyperbolique** si $(\tilde{M}, \tilde{\omega})$ est fortement symplectique hyperbolique.

Cela ne dépend du choix de la métrique puisqu'elles sont dans ce cas-là toutes équivalentes.

Remarque 2.2.2 Comparaison avec la Polterovich-symplectique-hyperbolicité : Si (M, ω) est Polterovich-hyperbolique alors soit M est fortement symplectique hyperbolique, (M, ω) est symplectique hyperbolique (et est même exponentiellement symplectique hyperbolique, c'est-à-dire que la croissance de la capacité est exponentielle).

Dém. : Si M est Polterovich hyperbolique il existe une 1-forme α sur le revêtement universel $(\tilde{M}, \tilde{\omega})$ tel que $d\alpha = \tilde{\omega}$ et $|\alpha|_g \leq C < \infty$ (où g est n'importe quelle métrique riemannienne provenant de M). Alors soit X le champ de vecteurs défini par $i_X \omega = \alpha$ et ϕ_t son flot. S'il existe M_0 avec $\mu(M_0) < \infty$ alors notons $M_t = \phi_t(M_0)$. Comme $\phi_t^* = e^t \omega$, $\mu(M_t) = c_0 e^t$. De plus $|X| \leq C$ et donc $d_g(\partial M_t, M_0) \leq C$. Et finalement (pour $t \geq 1$)

$$\frac{\mu(M_t)}{d_g(\partial M_t, x_0)^2} \geq \frac{e^t}{C t^2} \geq C' e^{\frac{t}{2}}. \blacksquare$$

2.2.6 Capacité symplectique et courbure

Dans le cadre complexe, des liens sont établis entre l'hyperbolicité complexe et la courbure sectionnelle : par exemple si la courbure sectionnelle est majorée par une constante strictement négative, alors la variété est complexe hyperbolique. Il est donc naturel de se demander s'il existe de tels liens entre la courbure (laquelle?) de la variété avec son hyperbolicité symplectique et la croissance de la capacité. Je montre dans cette partie que, dans le cadre de variétés Riemanniennes à bouts coniques (le pendant en géométrie Riemannienne des variétés convexes ou Stein des géométries symplectiques ou complexes), une courbure pas trop négative correspond intuitivement à une capacité qui ne croît pas trop vite, i.e. à une variété pas trop symplectique hyperbolique. L'objectif de cette partie sera d'expliquer cela.

Plus précisément, une **variété à bouts coniques** est une variété Riemannienne non compacte (M, g) qui s'écrit comme l'union $M_0 \cup (\cup_{j=0}^n W_j)$ avec M_0 une variété pseudo-Kähler compacte à bord et les W_j des bouts coniques de la forme $S_j \times [1, \infty[$ avec $\partial M_0 = \cup_{j=0}^n S_j$, de sorte que M soit obtenue par recollement des W_j sur M_0 le long des S_j .

Expliquons ce que l'on entend par bouts coniques : (W, g) est un bout conique s'il existe une fonction (fonction de Busemann) $\rho : W \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $|\nabla \rho| = 1$ et telle que W soit isomorphe à $S \times [1, \infty[$ via le flot de ρ : $(S \times \{t\}) = \rho^{-1}(t)$.

Ainsi si M est une variété à bouts coniques, une fonction-distance (ou fonction de Busemann) ρ_j est définie sur chaque bout W_j . Notons ρ la fonction obtenue en prolongeant ces fonctions sur M

entier prenant des valeurs entre 0 et 1 sur M_0 . Notons $\text{curv}(x)$ la courbure radiale (c'est-à-dire la courbure sectionnelle restreinte aux 2-plans contenant $\frac{\partial}{\partial \rho}$) en $x \in M \setminus M_0$ ($x \in \{\rho = s\}$ pour $s \geq 1$).

Notons de plus que par la suite nous noterons $\mathbb{B}(r) = \{\rho \leq r\}$ (même si ce ne sont pas au sens usuel des boules).

D'après Greene-Wu [20],

Lemme 2.2.4 *Considérons sur la fonction positive K définie sur un bout conique W par :*

$$K(s) = \max(0, \max \text{curv}(x) \text{ pour } x \text{ tel que } \rho(x) = s) \quad (2.17)$$

Si $\int_0^\infty sK(s) < 1$ et que μ une constante positive $0 < \mu \leq 1$ telle que $\int sK(s) = 1 - \mu \leq 1$, alors $\text{Hess}\rho \geq \frac{\mu}{\rho}H$ avec $H = g_0 - d\rho \otimes d\rho$ et donc $\text{dd}^c \rho^2 \geq 4\mu g$ (on sous-entend par là que pour tout v , $\text{dd}^c \rho^2(v, Jv) \geq 4\mu|v|^2$) sur W .

De même considérons la fonction positive k définie sur le bout W par :

$$-k(s) = \min(0, \min \text{curv}(x) \text{ pour } x \text{ tel que } \rho(x) = s). \quad (2.18)$$

Si elle vérifie $\int sk(s) < \infty$, et que η est une constante $\eta \in [1, \infty[$ telle que $\exp(\int sk(s)) = \eta < \infty$, alors $2\eta g \geq \text{dd}^c \rho^2$ sur W .

Précisons que dans le cas de l'hypothèse sur k l'intervalle d'intégration n'importe pas : il suffit de vérifier que $\int_1^\infty s k(s) < \infty$ (c'est équivalent à $\int_a^\infty s k(s) < \infty$ pour n'importe quel $a \geq 0$). Par contre dans le cas de l'hypothèse sur K , l'hypothèse (et les bornes d'intégration) demande à être précisées : on sous-entend que le bout W peut être prolongé en une variété à pole \bar{W} et que $\int_0^\infty s K(s) < 1$ sur \bar{W} . C'est ce que l'on sous-entendra à chaque fois que l'on formulera cette hypothèse $\int sK(s) = 1 - \mu \leq 1$.

Notons que si la courbure radiale satisfait à la fois (2.18) et (2.17) sur chacun des W_j , alors la métrique $\text{dd}^c \rho^2(., J.)$ (que nous désigneront plus simplement par $\text{dd}^c \rho^2$ pour simplifier par la suite) et la métrique g sont équivalentes sur $M \setminus M_0$.

On constate de plus que si la courbure radiale vérifie uniquement l'inégalité (2.17), i.e. n'est pas trop positive, alors ρ^2 est une fonction plurisousharmonique sur $M \setminus M_0$. Ainsi $\text{dd}^c \rho^2$ est une forme symplectique compatible avec J sur $M \setminus M_0$. Supposons que cette structure symplectique se prolonge en une structure symplectique ω compatible avec J sur M entier. Alors les hypersurfaces $\{\rho = s\}$ sont J -convexes et on peut donc appliquer notre analyse à la variété (M, ω, J, ρ^2) et étudier l'hyperbolicité symplectique de (M, ω) .

Si (M, ω) n'est pas fortement symplectique hyperbolique, quelle estimation peut-on obtenir pour $\mu(\{\rho^2 \leq a\}, \text{dd}^c \rho^2) = \mu(\mathbb{B}(\sqrt{a}), \text{dd}^c \rho^2)$?

Pour la norme initiale g on sait que $|d\rho|_g = 1$. Ainsi, si la courbure radiale vérifie l'inégalité (2.18), i.e n'est pas trop négative, alors $|d\rho|_{\text{dd}^c \rho^2}^2 \geq \frac{1}{4\eta}|d\rho|_g^2$. On a donc $\frac{|\nabla \rho^2|^2}{\rho^2} \geq \frac{1}{\eta}$, et d'après la proposition 2.2.5, $\mu(\{\rho \leq a\}) = \mu(\{\rho^2 \leq a^2\}) \leq ca^{2\eta}$. Ainsi on constate que dans ce contexte M est "suffisamment non hyperbolicité symplectique" si η est suffisamment petit, c'est-à-dire si la courbure radiale n'est pas trop négative. Plus précisément (en récapitulant),

Proposition 2.2.7 *Soit (M, J, g) une variété hermitienne à bouts coniques.*

$$-k(s) \leq \text{curv}(x) \leq K(s) \text{ pour tout } x \in \{\rho = s\}$$

avec k et K deux fonctions positives ou nulles.

- Si sa courbure radiale n'est pas trop positive, plus précisément si $\text{curv}(x) \leq K(s)$ pour tout $x \in \{\rho = s\}$ avec K vérifiant $1 \geq \int sK(s) = 1 - \mu \geq 0$,
- ou bien si $\text{Hess}\rho \geq \frac{\mu}{\rho}H$ avec $H = g_0 - d\rho \otimes d\rho$ (c'est-à-dire si $\text{Hess}\rho \geq \frac{\mu}{\rho}g_0$ sur TS),

alors $\text{dd}^c \rho^2$ est une forme symplectique compatible avec J sur $M \setminus M_0$. Si elle peut être prolongé en une structure symplectique ω sur M entier de sorte que (M, ω) n'est pas fortement symplectique hyperbolique, alors, si la courbure radiale n'est pas trop positive et plus précisément si k vérifie $\infty > \exp(\int sk(s)) = \eta$. on a un contrôle de la croissance de la capacité symplectique (et par-là même de l'hyperbolicité symplectique) : $\mu(\{\rho \leq a\}) = \mu(\{\rho^2 \leq a^2\}) \leq ca^{2\eta}$.

Ainsi moins la courbure radiale est négative c'est-à-dire plus η est petit, alors plus (M, ω) est non symplectique hyperbolique.

De plus M est non symplectique hyperbolique (au sens de l'exemple 2.2.3) si $\eta = 0$, i.e. si la courbure est positive ou nulle.

2.2.7 Variétés produits et variétés fibrés

Disposant de la notion d'hyperbolicité symplectique et de la capacité symplectique associée, plusieurs questions surgissent naturellement :

- Si l'on dispose de deux variétés symplectiques M et N et que l'une d'entre elles n'est pas symplectique hyperbolique, la variété produit $M \times N$ munie de la structure symplectique produit est-elle non symplectique hyperbolique également ?
- Auquel cas que peut-on dire de la capacité $\mu(M \times N)$ de la variété produit par rapport à celles des deux variétés $\mu(M)$ et $\mu(N)$?
- A-t-on des résultats similaires pour les variétés fibrés ?

Ce sont à ces questions que je tente de répondre dans cette partie.

Pour cela, je vais utiliser les résultats de Alexandru Oancea sur la cohomologie de Floer des variétés produits et des variétés fibrés [34] et tous les résultats de cette partie ont été obtenus en collaboration avec lui.

Proposition 2.2.8 *Si (M, ω_M) et (N, ω_N) sont deux variétés symplectiques compactes à bord. Alors :*

$$\mu(M \times N, \omega_M \otimes \omega_N) \leq \min(\mu(M, \omega_M), \mu(N, \omega_N)).$$

Dém. : Dans le cas d'une variété produit $M^{2m} \times N^{2n}$, Alexandru Oancea prouve l'existence d'une suite spectrale reliant la cohomologie de M , celle de N et celle de $M \times N$: pour tout $\lambda > 0$, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} \bigoplus_{r+s=k} FH^r(M, -\delta, \lambda) \otimes FH^s(N, -\delta, \lambda) & \longrightarrow & FH^k(M \times N, -\delta, 2\lambda) & \longrightarrow & FH^k(M \times N, -\delta, \lambda) \\ \downarrow c_M^r \times c_N^s & & \downarrow c_{M \times N}^k & & \downarrow c_{M \times N}^k \\ \bigoplus_{r+s=k} H^{r+m}(M, \partial M) \otimes H^{s+n}(N, \partial N) & \longrightarrow & H^{k+m+n}(M \times N, \partial(M \times N)) & \xrightarrow{\sim} & H^{k+m+n}(M \times N, \partial(M \times N)) \end{array}$$

De plus, on vérifie que la flèche composée du haut du diagramme :

$$\bigoplus_{r+s=k} FH^r(M, -\delta, \lambda) \otimes FH^s(N, -\delta, \lambda) \longrightarrow FH^k(M \times N, -\delta, 2\lambda) \longrightarrow FH^k(M \times N, -\delta, \lambda)$$

est surjective. Intuitivement, cela vient de ce que la suite d'Hamiltoniens construite pour $M \times N$ "provient" de la somme des Hamiltoniens de M et de N ; ainsi (comme les actions sont toutes positives ou nulles) une orbite pour $M \times N$ d'action plus petite que λ ne peut "provenir" que d'une orbite de M et d'une de N d'actions toutes deux plus petites que λ .

Pour k maximal, i.e. $k = m + n$, on sait que

$$H^{k+m+n}(M \times N, \partial(M \times N)) = H^{2(n+m)}(M \times N, \partial(M \times N)) = \mathbb{Z}_2$$

et $\bigoplus_{r+s=k} H^{r+m}(M, \partial M) \otimes H^{s+n}(N, \partial N) = H^{2m}(M, \partial M) \otimes H^{2n}(N, \partial N) = \mathbb{Z}_2$

sont isomorphes. Ainsi si $FH^m(M, -\delta, \lambda) \xrightarrow{c_M^m} H^{2m}(M, \partial M)$ ou $FH^n(N, -\delta, \lambda) \xrightarrow{c_N^n} H^{2n}(N, \partial N)$ n'est pas surjective, alors $c_M^m \times c_N^n$ ne l'est pas non plus, et donc, d'après le diagramme commutatif ci-dessus, $c_{M \times N}^{m+n} : FH^{m+n}(M \times N, -\delta, \lambda) \rightarrow H^{2(n+m)}(M \times N, \partial(M \times N))$ n'est pas surjective. ■

On en déduit donc :

Corollaire 2.2.1 *La non-hyperbolicité symplectique est stable par produit avec n'importe quelle autre variété symplectique ω -convexe.*

Dém. : Si (M, ω) est non symplectique hyperbolique (par exemple examinons le cas de la g -symplectique hyperbolicité) alors il existe une suite (M_j) de domaines ω -convexes tels que $\mu(M_j, \omega) \leq d_g(x_0, \partial M_j)^2$. Soit (N, ω') une variété ω' -convexe (munie d'une métrique g'). Elle s'écrit comme union croissante et exhaustive de domaines N_j et quitte à extraire une sous suite on peut supposer que $d'_{g'}(y_0, \partial N_j) \geq d_g(x_0, \partial M_j)$. Alors, si on note $\omega_0 = \omega \otimes \omega'$ et g_0 la métrique produit de g et g' , $\mu(M_j \times N_j, \omega_0) \leq \mu(M_j, \omega) \leq d_g(x_0, \partial M_j)^2 \leq d_{g_0}((x_0, y_0), \partial(M_j \times N_j))^2$ (par choix des N_j). ■

Cette propriété est analogue à celle que l'on a pour les hyperbolicités complexes : si (M, J) est non complexe hyperbolique, alors pour toute variété (N, J') , $(M \times N, J \oplus J')$ est non complexe hyperbolique.

Dans le cas de variétés-fibrés, moins de résultats sur leur cohomologie de Floer sont connus. Seul le cas de variétés fibrés dont la base est fermée a pu être pour l'instant traité [34] et même dans ce cas, les résultats sont encore partiels. Toutefois, les cas des fibrés en droites à courbure négative a lui été bien compris : si (B^{2n}, β) est une variété symplectique fermée dont la forme symplectique est entière $[\beta] \in H^2(B, \mathbb{Z})$ et que \mathcal{L} est un fibré en droites complexes au-dessus de B tel que $c_1(\mathcal{L}) = -[\beta]$. Alors \mathcal{L} peut être muni d'une structure symplectique, dite de fibration symplectique forte [34]. Et Alexandru Oancea montre que, pour une telle structure symplectique, on peut obtenir la cohomologie de Floer de \mathcal{L} comme la limite d'une suite spectrale (E_r) dont le deuxième terme est $E_2^{p,q} = H^{n-p}(B, FH^q(F))$, où F désigne la fibre. De plus ce résultat est encore valable pour les cohomologies partielles $FH^*(\cdot, \mu)$. Plus précisément, on montre :

Proposition 2.2.9 *Soient (B^{2n}, β) une variété symplectique fermée dont la forme symplectique est entière $[\beta] \in H^2(B, \mathbb{Z})$ et \mathcal{L} un fibré en droites complexes au-dessus de B tel que $c_1(\mathcal{L}) = -[\beta]$. Alors si on munit \mathcal{L} d'une structure symplectique, dite de fibration symplectique forte, pour tout $\mu \notin \mathbb{Z}\pi r^2$, et que l'on considère L_r le fibré en disques de rayon r inclus dans \mathcal{L} , la cohomologie*

de Floer $FH^*(L_r, -\delta, \mu)$ (pour cette structure symplectique) est la limite d'une suite spectrale dont le deuxième terme est $H^*(B, FH^*(F_r, \mu))$ (où F_r est la fibre et est donc isomorphe au disque euclidien $\mathbb{D}(r)$). De plus cette suite spectrale est munie d'un morphisme vers la suite de Leray-Serre en cohomologie relative, dont le deuxième terme est $H^*(B, H^*(F, \partial F))$ et qui tend vers $H^*(L_r, \partial L_r)$.

Nous en déduisons donc :

Corollaire 2.2.2 *Sous les hypothèses précédentes :*

$$\mu(L_r) \leq \mu(\mathbb{D}(r)) = \pi r^2$$

Le corollaire découle immédiatement de la proposition puisque la proposition fournit (si on l'écrit en dimension maximale) un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} FH^{n+1}(L_r, -\delta, \mu) & \xrightarrow{c_{L_r}^{n+1}} & H^{2(n+1)}(L_r, \partial L_r) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^{2n}(B, FH^1(F, \mu)) & \xrightarrow{c_F^1!} & H^{2n}(B, H^2(F, \partial F)) \end{array}$$

où je note $c_F^1!$ le morphisme de $H^{2n}(B, FH^1(F, \mu))$ vers $H^{2n}(B, H^2(F, \partial F))$ naturellement associé au morphisme $c_F^1 : FH^1(F, \mu) \rightarrow H^2(F, \partial F)$. Or la fibre $F \simeq (\mathbb{D}^{2n}(r), \omega_0)$. Ainsi pour $\mu > \pi r^2$ c_F^1 est non surjective, et même en fait : $FH^1(F, \mu) = 0$. De plus $H^2(F, \partial F) = \mathbb{Z}_2$ et $H^{2(n+1)}(L_r, \partial L_r) \rightarrow H^{2n}(B, H^2(F, \partial F))$ est un isomorphisme. Et donc si $c_F^1!$ n'est pas surjectif, alors $c_{L_r}^{n+1}$ ne l'est pas non plus.

Dém. : (de la proposition) La proposition découle de la discussion donnée au 4.5 dans [34]. Soit f une fonction sur B dont le module est strictement plus petit que la distance de μ à $\mathbb{Z}\pi r^2$. On considère sur l'espace total L_r des hamiltoniens de la forme $\tilde{f} + H$, avec $H(p) = \lambda|p|^2$. Lorsque λ tend vers l'infini, cela forme une famille cofinale de hamiltoniens asymptotiquement linéaires ([34]). La cohomologie de Floer est bien définie, qu'elle soit tronquée ou non. Regardons alors la cohomologie tronquée à $[-\delta, \mu]$ pour l'espace total. Le complexe est naturellement filtré (puisque les trajectoires de Floer de l'espace total se projettent sur les trajectoires de Floer de la base). Le deuxième terme est donné par l'homologie de la base à coefficients dans un certain système local. On peut l'expliciter : au dessus de chaque point critique z de f on doit calculer l'homologie de Floer dans la fibre basée sur les orbites dont l'action totale est plus petite que μ . Cela veut dire que l'action dans la fibre est plus petite que $\mu + f(z)$ i.e. on obtient l'homologie de Floer de la fibre tronquée à $[-\delta, \mu + f(z)]$. Mais f est petite, donc cela coïncide avec l'homologie de la fibre tronquée à $[-\delta, \mu]$.

Enfin, la flèche vers la suite spectrale de Leray-Serre provient de la troncature à $[-\delta, \delta]$. ■

Chapitre 3

Cadre pseudo-complexe

Comme nous l'expliquions dans l'introduction, les définitions des hyperbolicités complexes, définies pour les variétés complexes [29] [28] sont essentiellement basées sur la notion de disques holomorphes. Ainsi, on constate que ces notions peuvent être immédiatement généralisées au cas de variétés pseudo-complexes, et ce en conservant les mêmes définitions et en remplaçant juste le terme "holomorphe" par "pseudo-holomorphe". On constate de plus que les principaux théorèmes et propriétés sur l'hyperbolicité complexe (dont on peut trouver un compte-rendu assez exhaustif dans [29]) restent valables dans le cadre "pseudo-complexe" (les démonstrations s'adaptant parfaitement à ce cas). On introduit ainsi le domaine de l' **hyperbolicité pseudo-complexe** qui devrait permettre de considérer sous un autre jour les problèmes ouverts d'hyperbolicité complexe. Cette question n'a que très récemment vraiment été abordée, notamment par des articles de Kruglikov, ou Debalme et Ivashkovich, ou encore Gaussier-Sukhov [18]. L'un des premiers à s'être intéressé à cette question a été Bangert [3] qui l'aborda du point de vue symplectique en étudiant l'hyperbolicité pseudo-complexe du tore pour des structures pseudo-complexes compatibles à la structure symplectique standard.

Nous rappelons tout d'abord les définitions et principaux résultats d'hyperbolicité complexe. Nous les énoncerons dans le cadre pseudo-complexe ; toutefois dans toute la suite de la thèse, nous utiliserons tout simplement le terme de "hyperbolicité complexe" et ce même dans le cadre pseudo-complexe afin de ne pas trop alourdir les phrases.

J'expliquerai alors comment, dans ce cadre, apparaît naturellement une notion d'hyperbolicité dépendant à la fois de la structure pseudo-complexe et de la métrique g de la variété, et qui coïncide avec les autres notions d'hyperbolicité complexe dans le cas compact (et également sous des hypothèses de compacité plus générales). Dans le cas où g est une métrique pseudo-Kähler associée à une structure symplectique ω et à la structure pseudo-complexe J , j'introduis ainsi une notion d'hyperbolicité pseudo-Kähler.

Cette pseudo-Kähler hyperbolicité, apparaît alors comme un lien naturel entre l'hyperbolicité symplectique et l'hyperbolicité complexe, comme je le montrerai dans la partie suivante. D'ores et déjà j'étudie son lien avec la notion de Kähler-hyperbolicité définie par Gromov pour des variétés Kähler fermées.

Enfin, après des rappels sur la théorie de Nevanlinna, j'explique que celle-ci permet d'introduire un invariant qui associe à chaque disque pseudo-holomorphe "sa hauteur". J'étudie alors cet invariant en démontrant plusieurs résultats permettant de faire le lien entre certaines séquences de disques pseudo-holomorphes et les hyperbolicités complexes (généralement l'hyperbolicité pseudo-Kähler). Ces résultats seront particulièrement utiles dans la suite de l'étude.

3.1 Hyperbolicités pseudo-complexes

3.1.1 Variétés complexes hyperboliques au sens de Kobayashi

Soit \mathbb{D} le disque unité du plan complexe. La métrique hyperbolique au point $z \in \mathbb{D}$ est :

$$|v|_{\text{hyp}} = \frac{|v|_{\text{euc}}}{1 - |z|^2} \quad \text{si } v \in T_z \mathbb{D}.$$

À cette métrique, on associe naturellement une distance, notée d_{hyp} ; c'est la distance hyperbolique sur le disque. On peut de même définir la métrique hyperbolique du disque \mathbb{D}_r de rayon r : $|v| = \frac{r|v|}{r^2 - |z|^2}$; c'est celle qui rend le biholomorphisme de \mathbb{D} sur \mathbb{D}_r : $z \rightarrow zr$ isométrique. On note $d_{\text{hyp},r}$ la distance associée.

Toute application holomorphe de \mathbb{D} dans lui-même est contractante pour cette métrique. C'est une conséquence du lemme classique suivant :

Lemme 3.1.1 (Schwarz-Pick) *Si $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ est holomorphe, alors*

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}.$$

Cette propriété nous permet de “transporter” la métrique hyperbolique via des disques pseudo-holomorphes sur les autres variétés pseudo-complexes, construisant ainsi la pseudo-distance de Kobayashi.

Considérons M une variété pseudo-complexe connexe, et x et y deux points quelconques de M . Expliquons cela plus précisément.

On obtient une chaîne de disques joignant x à y en considérant des applications pseudo-holomorphes

$$f_i : \mathbb{D} \rightarrow M, \quad i = 1 \dots m$$

et des points p_i et $q_i \in \mathbb{D}$ vérifiant :

$$\begin{cases} f_1(p_1) = x, \\ f_m(q_m) = y, \\ f_i(q_i) = f_{i+1}(p_{i+1}), \quad i = 1 \dots (m-1). \end{cases}$$

À une telle chaîne $C_{x,y}$, on associe une somme de Kobayashi :

$$S_{C_{x,y}} = \sum_{i=1}^m d_{\text{hyp}}(p_i, q_i).$$

Si M est connexe, alors il existe une chaîne de disques dans M joignant x à y . On peut donc définir la semi-distance de Kobayashi entre x et y .

Définition 3.1.1 (La semi-distance de Kobayashi) *On pose*

$$d_M(x, y) = \sup_{\mathcal{E}} S_{C_{x,y}} \quad \text{où } \mathcal{E} = \{C_{x,y} \text{ chaîne de Kobayashi entre } x \text{ et } y\}.$$

La fonction $d_M : (x, y) \mapsto d_M(x, y)$ est positive, symétrique et vérifie l'inégalité triangulaire ; mais ce n'est pas nécessairement une distance, car on peut avoir $x \neq y$ mais $d_M(x, y) = 0$. C'est donc une semi-distance.

Les exemples du disque et du plan complexes sont fondamentaux.

- Comme les applications holomorphes du disque dans lui-même sont contractantes, la semi-distance de Kobayashi du disque, $d_{\mathbb{D}}$, (resp. $d_{\mathbb{D},r}$) est la distance hyperbolique d_{hyp} (resp. $d_{\text{hyp},r}$).
- Dans le cas du plan complexe, la semi-distance de Kobayashi, $d_{\mathbb{C}}$ est nulle. En effet, soient x et y de \mathbb{C} . Pour tout $n > 1$, l'application holomorphe sur \mathbb{D} , $f_n(z) = x + n(y - x)z$ vérifie $f(0) = x$ et $f(\frac{1}{n}) = y$. Comme $d_{\text{hyp}}(0, \frac{1}{n}) \rightarrow 0$, on a donc $d_{\mathbb{C}}(x, y) = 0$.

Soulignons plusieurs propriétés vérifiées par la semi-distance de Kobayashi conséquences immédiates de sa définition.

Proposition 3.1.1 *La semi-distance de Kobayashi est continue.*

Proposition 3.1.2 *Toute fonction pseudo-holomorphe $f : M \rightarrow Y$ est contractante pour les semi-distances de Kobayashi, d_M et d_Y .*

On en déduit, vu que $d_{\mathbb{C}} = 0$:

Proposition 3.1.3 *Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow M$, (pseudo-)holomorphe. Alors, $\forall x, y \in \mathbb{C}$, $d_M(x, y) = 0$.*

Cette pseudo-distance est la base de la définition de la Kobayashi-hyperbolicité :

Définition 3.1.2 (Kobayashi-hyperbolicité) *Une variété (pseudo-)complexe M est hyperbolique au sens de Kobayashi (ou Kobayashi-hyperbolique), si d_M est une vraie distance, i.e. si*

$$d_M(x, y) = 0 \Rightarrow x = y.$$

S'il n'y a pas d'ambiguïté possible, on dira simplement que M est (complexe) hyperbolique.

Le disque \mathbb{D} est évidemment Kobayashi-hyperbolique, \mathbb{C} évidemment pas.

De plus, on vérifie aisément que si la variété complexe M est hyperbolique, alors la distance d_M définit la topologie naturelle de M .

Les variétés complexes hyperboliques ont été et sont encore largement étudiées [28], [29], notamment pour les propriétés exceptionnelles qu'elles présentent, mais aussi avec pour motivation les liens entre ce domaine et la géométrie diophantienne. De nombreux résultats permettant d'étudier l'hyperbolicité de variétés complexes ont été prouvés. Toutefois beaucoup de conjectures et de problèmes restent encore ouverts. Parmi les nombreux résultats sur les variétés hyperboliques, citons par exemple une proposition fondamentale :

Proposition 3.1.4 *Soit $\Pi : X \rightarrow Y$, un revêtement de variétés complexes. Alors, X est hyperbolique si et seulement si Y est hyperbolique.*

Cette proposition permet ainsi de montrer que les surfaces de genre 2 (dont le revêtement universel est \mathbb{D}) sont hyperboliques.

Pour une sous-variété M d'une variété complexe Y , on a une notion un peu plus forte que l'hyperbolicité au sens de Kobayashi, qui rend compte du comportement de la distance de Kobayashi d_M au voisinage de la frontière de M . Il s'agit de celle de variété hyperboliquement plongée. Il en existe plusieurs définitions équivalentes. Citons :

Définition 3.1.3 (Variétés hyperboliquement plongées) *Soit M une sous-variété de Y , une variété complexe (éventuellement $Y = M$). Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *Soient (x_n) et (y_n) deux suites d'éléments de M , convergeant vers x , respectivement vers y , dans \bar{M} . Alors, si $d_M(x_n, y_n) \rightarrow 0$, on a $x = y$.*

(ii) Pour toute (resp. pour une) métrique g fixée sur Y , il existe une fonction ϕ strictement positive sur Y , vérifiant : $\forall f : \mathbb{D} \rightarrow M, |f'(z)| \leq \phi(f(z))$, la norme $|f'(z)|$ étant prise pour la métrique hyperbolique du disque et pour g .

Si M vérifie ces conditions, on dit qu'elle est hyperboliquement plongée dans Y .

On remarque que cela implique bien que M est hyperbolique. Réciproquement, M Kobayashi-hyperbolique est équivalent à M hyperboliquement plongé dans lui-même. Notons de plus que la définition de "hyperboliquement plongé dans Y " ne dépend que très peu de Y ; elle ne dépend que du voisinage de M dans Y , de la façon dont M est plongé dans Y .

Pour compléter le tableau introduisons une dernière définition classique d'hyperbolicité complexe. D'après la proposition 3.1.3, notons que si M est Kobayashi-hyperbolique, alors il n'existe pas d'applications holomorphes $f : \mathbb{C} \rightarrow M$ non constantes. Cette propriété est la Brody-hyperbolicité, notion d'hyperbolicité complexe moins forte que la Kobayashi-hyperbolicité. Finalement on a pour les différentes notions d'hyperbolicité complexe classiques :

Hyperboliquement plongé \Rightarrow Kobayashi-hyperbolique \Rightarrow Brody-hyperbolique

3.1.2 Brody-hyperbolicité et lemme de Brody

Définition 3.1.4 Une variété complexe M est dite Brody-hyperbolique si les seules applications holomorphes $f : \mathbb{C} \rightarrow M$ sont constantes, i.e. si M ne contient pas de courbes entières.

D'après la proposition 3.1.3, on a :

Proposition 3.1.5 Une variété complexe Kobayashi-hyperbolique est Brody-hyperbolique.

En fait sous certaines conditions de compacité, il est possible d'établir la réciproque. L'étude de cette réciproque est basée sur un résultat fondamental qui nous sera également utile par la suite : le lemme de Brody :

Lemme 3.1.2 (lemme de reparamétrisation de Brody) Soit M une sous variété complexe d'une variété complexe Y munie d'une fonction longueur. Soit $f : \mathbb{D}_r \rightarrow M$ une application holomorphe telle que $|df(0)| > c$. Alors, il existe un nombre positif $t < 1$ et un automorphisme h du disque \mathbb{D}_r , tels que l'application holomorphe sur \mathbb{D}_r $g = f_t \circ h$ vérifie :

$$\sup_{z \in \mathbb{D}_r} |dg(z)|_{\text{hyp},r} = |dg(0)|_{\text{hyp},r} = c, \quad (3.1)$$

où l'on a posé $f_t = f \circ m_t$ et où $|dg(z)|_{\text{hyp},r}$ est la norme calculée avec la norme hyperbolique sur le disque \mathbb{D}_r :

$$|dg(z)|_{\text{hyp},r} = \frac{r^2 - |z|^2}{r} |dg(z)|_{\text{euc}}.$$

Dém. : Si l'on pose $s(t) = \sup_{z \in \mathbb{D}_r} |df_t(z)|$, on vérifie que s est continue sur $[0, 1[$, que $s(0) = 0$ et que $\lim_{t \rightarrow 1} s(t) = s(1) > c$ par hypothèse (éventuellement infini). Il existe donc un $t < 1$ tel que $s(t) = c$; on vérifie de plus que $s(t)$ est en fait un maximum atteint à l'intérieur de \mathbb{D}_r , et via un automorphisme du disque on se ramène à un maximum atteint en 0. ■

Expliquons le raisonnement habituel que permet alors ce lemme afin de relier les différentes

hyperbolicités complexes sous des hypothèses de compacité. Ce raisonnement sera plusieurs fois utilisé par la suite mais sans être une nouvelle fois détaillé.

Si M est une sous-variété complexe relativement compacte dans Y , alors toute fonction strictement positive sur Y est majorée par une constante sur M , et donc la condition (ii) de la définition 3.1.3 du plongement hyperbolique est équivalente à l'existence d'une constante $C > 0$ telle que $\forall f : \mathbb{D} \rightarrow M$, $|f'(z)|_{\text{hyp}} \leq C$, la norme $|f'(z)|_{\text{hyp}}$ étant prise pour la métrique hyperbolique du disque. Ainsi si M n'est pas hyperboliquement plongée, il existe une suite de fonctions holomorphes $f_n : \mathbb{D} \rightarrow M$ avec $\sup_{z \in \mathbb{D}} |df_n(z)|_{\text{hyp}} \rightarrow \infty$. Via des automorphismes du disque, on obtient une suite de fonctions f_n , avec $|df_n(0)| \rightarrow \infty$ (on peut supposer $|df_n(0)| > r_n$ avec $r_n \rightarrow \infty$). Le lemme de reparamétrisation nous permet alors d'obtenir une suite de fonctions (h_n) holomorphes sur \mathbb{D} vérifiant :

$$\sup_{z \in \mathbb{D}} |dh_n(z)|_{\text{hyp}} = |dh_n(0)| = r_n. \quad (3.2)$$

En posant, $g_n(z) = h_n(\frac{z}{r_n})$, on obtient une suite de fonctions holomorphes sur \mathbb{D}_{r_n} vérifiant :

$$|dg_n(0)|_{\text{euc}} = 1 = \frac{1}{r_n} \sup_{z \in \mathbb{D}_{r_n}} |dg_n(z)|_{\text{hyp}, r_n} = \sup_{z \in \mathbb{D}_{r_n}} |dg_n(z)|_{\text{euc}} \frac{r_n^2 - |z|^2}{r_n^2}$$

De plus, on vérifie que pour $n > m$, $r_n d_{\mathbb{D}_{r_n}} < r_m d_{\mathbb{D}_{r_m}}$ sur \mathbb{D}_{r_m} . On en déduit alors l'équicontinuité des fonctions g_n et le théorème d'Ascoli nous permet d'en déduire l'existence de $g : \mathbb{C} \rightarrow \overline{M}$, avec $|dg(0)| = 1$ et donc non constante. Ainsi, \overline{M} n'est pas Brody-hyperbolique.

Notons que $\forall z \in D_{r_n}$,

$$|dg_n(z)|_{\text{euc}} \leq \frac{r_n^2}{r_n^2 - |z|^2}$$

On pouvait donc aussi restreindre g_n au disque de rayon $\frac{2}{3}r_n \rightarrow \infty$ et ainsi obtenir des applications lipschitziennes pour la norme euclidienne. Alors la limite g vérifie $|dg(0)| = 1$ et est Lipschitzienne.

Finalement on a montré :

Théorème 3.1.1 (Brody) *Soit M une sous-variété relativement compacte dans une variété complexe Y , munie d'une métrique g . Si M n'est pas hyperboliquement plongée dans Y , alors il existe une suite de fonctions holomorphes $g_n : \mathbb{D}_{r_n} \rightarrow M$, avec $r_n \rightarrow \infty$, qui convergent uniformément sur les compacts de \mathbb{C} vers une application holomorphe $g : \mathbb{C} \rightarrow \overline{M}$, vérifiant :*

$$|dg(0)| = 1 = \sup_{z \in \mathbb{C}} |dg(z)|_{\text{euc}}. \quad (3.3)$$

En particulier \overline{M} n'est pas Brody-hyperbolique.

On montre de même (en utilisant la contraposée) :

Théorème 3.1.2 (Brody) *Soit M un sous-variété relativement compact d'une variété complexe Y . Si \overline{M} est Brody-hyperbolique dans Y , alors il existe un voisinage ouvert de \overline{M} dans Y Kobayashi-hyperbolique.*

Ces théorèmes impliquent notamment :

Théorème 3.1.3 *Une variété complexe compacte est Brody-hyperbolique si et seulement si elle est Kobayashi-hyperbolique. En fait, dans le cas compact, toutes les définitions d'hyperbolicité sont équivalentes.*

Mais ces théorèmes ont de nombreuses autres applications dans l'étude de l'hyperbolicité complexe. Citons-en notamment une qui constituera l'une des motivations de notre étude du chapitre 5 :

3.1.3 Application : stabilité de l'hyperbolicité

Les théorèmes de Brody permettent d'étudier l'hyperbolicité des variétés complexes fibrées (M, Π, Y) :

Théorème 3.1.4 *Soit (M, Π, Y) , une variété complexe fibrée aux fibres compactes, i.e., la donnée d'une application holomorphe surjective $\Pi : M \rightarrow Y$, telle que $\forall y \in Y, \Pi^{-1}(y) = M_y$ soit compacte.*

- (i) *Si $\exists y_0$ tel que la fibre M_{y_0} soit hyperbolique, alors $\exists U$, un voisinage de y_0 , tel que M_U soit hyperbolique. En particulier, toutes les fibres M_y , pour $y \in U$, sont hyperboliques.*
- (ii) *Si $\forall y \in Y$, la fibre M_y est hyperbolique et si Y est hyperbolique, alors M est hyperbolique.*

On remarque que le (i) fournit un **résultat de stabilité par déformation pour l'hyperbolicité complexe** des variétés complexes compactes, i.e., l'hyperbolicité est une propriété ouverte.

En revanche, il existe des exemples prouvant que la non-hyperbolicité n'est elle pas une propriété stable par déformation. On peut par exemple considérer l'exemple des surfaces de Fermat.

Sur $\mathbb{P}^3\mathbb{C}$ (munies des coordonnées homogènes (z_0, z_1, z_2, z_3)) on définit la famille des surfaces de Fermat de degré d : $X_t = \{z_0^d + z_1^d + z_2^d + z_3^d + (t z_0 z_1)^{\frac{d}{2}} + (t z_0 z_2)^{\frac{d}{2}} = 0\}$. On constate que pour $t = 0$ cette surface n'est pas Brody-hyperbolique (on peut facilement exhiber une courbe entière non constante). Mais on montre (voir [29]) que pour tout $t \neq 0$ petit, X_t est complexe-hyperbolique (toutes les définitions coïncident dans le cas de ces variétés compactes). Cela constitue donc un exemple où la non-hyperbolicité n'est pas stable par déformation (et ce même pour des variétés compactes).

3.1.4 Dans ce cadre, la pseudo-Kähler hyperbolicité

Si l'on examine la démonstration des théorèmes de Brody, on constate que pour appliquer le lemme de Brody et en déduire l'existence de $g : \mathbb{C} \rightarrow M$ non constante, on a en fait uniquement besoin de l'existence de disques pseudo-holomorphes $f_n : \mathbb{D} \rightarrow M$ avec $\sup_{z \in \mathbb{D}} |df_n(z)|_{\text{hyp}} \rightarrow \infty$.

Comme nous l'avons fait remarquer en 3.1.2, une telle suite existe si M est non hyperboliquement plongée, et on a même une équivalence dans le cas relativement compact. Ainsi la contraposée de la propriété (d'existence) énoncée ci-dessus définit une notion d'hyperbolicité qui, dans le cas relativement compact est équivalente au caractère hyperboliquement plongé.

Toutefois notons que contrairement aux hyperbolicités complexes usuelles (précédemment définies) qui ne dépendent que de la structure (presque) complexe fixée (dans le cas du caractère hyperboliquement plongé elle dépend aussi du plongement dans la variété ambiante), elle dépend aussi (dans le cas non compact) de la métrique g que l'on s'est fixée sur la variété.

Ceci est l'idée de la définition de la **g -hyperbolicité**, que j'appellerai dans le cas d'une métrique pseudo-Kähler, **hyperbolicité pseudo-Kähler** ou (ω, J) -hyperbolicité.

Définition 3.1.5 Soit (M, J) une variété pseudo-complexe non fermée. Si l'on se fixe une structure symplectique compatible et ainsi une métrique pseudo-Kähler $g = \omega(., J.)$ sur M , (M, J, g) est dite **pseudo-Kähler hyperbolique**, ou (ω, J) -hyperbolique (on adoptera ce terme si le choix de la métrique pseudo-Kähler n'est pas évident), s'il existe une constante $C > 0$ qui borne la norme (pour g et la métrique hyperbolique du disque) de toute fonction J -holomorphe $f : \mathbb{D} \rightarrow M$. Si l'on adopte les notations de [29] en définissant pour $f : \mathbb{D} \rightarrow M$ $c_g(f) = c(f) = \sup_{z \in \mathbb{D}} |f'(z)|_{\text{hyp}}$ et $c(M) = \sup\{c(f), f : \mathbb{D} \rightarrow M \text{ } J\text{-holomorphe}\} = \sup\{|f'(0)|, f : \mathbb{D} \rightarrow M \text{ } J\text{-holomorphe}\}$, cette définition est équivalente à $c(M) < \infty$.

Si (M, J) est une variété pseudo-complexe fermée et \tilde{M} son revêtement universel. On dit que (M, J) est pseudo-Kähler si $(\tilde{M}, \tilde{J}, \tilde{g})$ n'est pas pseudo-Kähler, où \tilde{J} est le relevé de J et \tilde{g} est le relevé d'une métrique pseudo-Kähler quelconque sur M (cela ne dépend alors pas du choix de la métrique).

Notons que l'on peut aussi définir une notion de g -hyperbolicité pour une métrique quelconque. Toutefois, comme ici mon but est de faire le lien entre l'hyperbolicité complexe et l'hyperbolicité symplectique, je n'étudierai généralement que le cas de métrique pseudo-Kähler. Comme on l'a expliqué, cette notion de pseudo-Kähler hyperbolicité est plus forte que le caractère hyperboliquement plongé, mais lui est équivalente dans le cas de variété plongée de façon relativement compacte dans une autre.

De plus, par choix même de sa définition (dont l'idée vient directement de la démonstration du théorème de Brody) on constate que dans le cas de variété non (ω, J) -hyperbolique, on peut reproduire la démonstration du théorème de Brody et ainsi on obtient :

Théorème 3.1.5 Soit (M, J) une variété pseudo-complexe munie d'une structure symplectique ω compatible. Si M n'est pas (ω, J) -hyperbolique, alors on a notamment :

1. si M est relativement compacte dans une variété complexe W , alors \overline{M} n'est pas Brody-hyperbolique, et M n'est pas relativement plongée dans W .
2. si M est compacte ou si elle admet un groupe de pseudo-isométrie holomorphe co-compact, alors M n'est pas Brody-hyperbolique et donc pas Kobayashi-hyperbolique. En fait dans ce cas, toutes les notions d'hyperbolicité complexe et la pseudo-Kähler hyperbolicité sont équivalentes.

Ainsi même si dans le cas général la non (ω, J) -hyperbolicité est une notion plus faible que les non-hyperbolicités complexes, ce théorème me permet de montrer que dans de nombreux cas, elle leur est équivalente.

Dém. : En reprenant la démonstration du théorème de Brody, on montre qu'il existe une suite de fonctions pseudo-holomorphes $g_n : \mathbb{D}_{r_n} \rightarrow M$, avec $r_n \rightarrow \infty$, vérifiant :

$$|dg_n(0)|_{\text{euc}} = 1 \quad \text{et} \quad \sup |dg_n(z)|_{\text{euc}} \leq C$$

alors, avec les hypothèses 1., la suite g_n converge uniformément sur tout compact de \mathbb{C} vers une fonction pseudo-holomorphe non constante $f : \mathbb{C} \rightarrow \overline{M}$.

Dans le cas d'une variété relativement compacte (resp. compacte) on montre donc que la non pseudo-Kähler hyperbolicité implique que \overline{M} (resp. M) est non Brody-hyperbolique.

De plus, dans le cas d'une variété complexe quelconque M , si on suppose qu'il existe un groupe Γ de biholomorphismes de M qui soient tous des pseudo-isométries (c'est-à-dire des biholomorphismes ψ tels que la métrique ψ^*g soit équivalente à g) avec M/Γ compact, alors, quitte à composer les applications g_n par des isométries afin que $g_n(0)$ restent dans un compact, la suite de fonctions holomorphes obtenues converge vers une fonction holomorphe $f : \mathbb{C} \rightarrow M$ non-constante. Et dans ce cas aussi la pseudo-Kähler hyperbolicité et la Brody-hyperbolicité sont équivalentes. ■

En particulier, cela s'applique aux cas :

Corollaire 3.1.1 $M = W \setminus \Sigma$, où Σ est une hypersurface localement définie par $\{\phi = 0\}$ avec $\phi : V \subset M \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction (J, i) -holomorphe. Alors on déduit du théorème 3.1.5 qu'il existe une fonction holomorphe non constante f sur \mathbb{C} à valeurs soit dans M soit dans Σ , i.e. soit M , soit Σ est non Brody-hyperbolique.

Corollaire 3.1.2 Si M admet pour quotient une variété compacte $W = M/\Gamma$, où Γ est un groupe de difféomorphismes de M , et si on considère une structure pseudo-complexe J et une structure symplectique ω relevées de structures J_0 et ω_0 de W . Alors M n'est pas (ω, J) -hyperbolique si et seulement si elle n'est pas Brody-hyperbolique (on a le même résultat pour W).

Rappelons que Gromov avait introduit une notion de Kähler-hyperbolicité définie (uniquement) pour les variétés fermées munies d'une structure Kähler.

Définition 3.1.6 Soit (M, ω, J) une variété Kähler fermée. Et soit $(\widetilde{M}, \omega, J)$ son revêtement universel. On dit que M est Kähler-hyperbolique s'il existe une 1-forme β sur \widetilde{M} telle que $d\beta = \omega$ et donc la norme $|\beta|$ pour la métrique Kähler soit bornée sur \widetilde{M} .

Il est naturel de se poser la question du lien entre les deux et l'on constate que :

Lemme 3.1.3 Si (M, J, ω) est une variété Kähler fermée ; si elle est non pseudo-Kähler alors elle est non Kähler.

Ainsi dans le cadre de variétés fermées :

Kähler hyperbolicité \Rightarrow pseudo-Kähler hyperbolicité \simeq Kobayashi(ou Brody)-hyperbolicité

Dém. : Ce lemme est une conséquence immédiate du résultat bien connu de Gromov [27], [2] :

Lemme 3.1.4 (Lemme de Gromov-Schwarz) Si (M, J, g) est une variété pseudo-complexe munie d'une structure riemannienne J -symétrique à géométrie bornée. Soit β une 1-forme dont la norme $|\beta|$ est bornée sur M . Supposons qui plus est que $d\beta$ vérifie : il existe $\alpha > 0$ telle que pour tout $v \in TM$ $d\beta(v, Jv) \geq \alpha g(v, v)$. Alors il existe une constante C telle que pour toute fonction holomorphe $f : \mathbb{D} \rightarrow M$, $|f'|_{\text{hyp}} \leq C$ sur \mathbb{D} .

Et en fait, pour obtenir l'existence d'une telle constante C , il suffit de supposer qu'il existe des constantes K et M telles que pour tout $f : \mathbb{D} \rightarrow M$ J -holomorphe (si on note $l = \text{longueur}(f(\partial\mathbb{D}(r)))$ et $a = \text{aire}(f(\mathbb{D}(r)))$)

- $l^2 \geq 4\pi a - Ka^2$ (automatique si la courbure Gaussienne est majorée par K)
- $l \geq Ma$ (automatique si $\omega = d\beta$ avec $|\beta|$ bornée).

Si M est non Kähler hyperbolique, il existe β sur \widetilde{M} telle que $d\beta = \omega$ et qui soit de norme bornée. On peut donc appliquer ce lemme à \widetilde{M} et β car dans ce cas $d\beta(v, Jv) = g(v, v)$. ■

Notons que, dans le cas d'une variété Kähler, cette notion d'hyperbolicité Kähler coïncide avec

la définition de Polterovich-hyperbolicité (elle définie pour toute variété symplectique).

La notion de pseudo-Kähler hyperbolicité, nous allons le voir (et d'ores et déjà sa définition basée à la fois sur les structures pseudo-complexes et symplectiques nous le laissent entrevoir), apparaît naturellement quand on tente de faire le lien entre l'hyperbolicité complexe et l'hyperbolicité symplectique. D'un côté nous avons vu qu'elle était dans de nombreux cas équivalente à l'hyperbolicité complexe (ou plutôt en général à une). De l'autre, son lien avec l'hyperbolicité symplectique est moins clair. Ce sont les disques pseudo-holomorphes qui vont constituer ce lien. Nous allons donc pour cela avoir besoin de résultats faisant le lien entre l'existence de disques pseudo-holomorphes satisfaisant certaines propriétés et la pseudo-Kähler hyperbolicité. (Le lien entre l'hyperbolicité symplectique et l'existence de disques pseudo-holomorphes sera étudié dans le prochain chapitre).

Nous disposons d'ores et déjà d'un résultat utilisé par Bangert dans son étude de l'hyperbolicité pseudo-complexe du tore :

Proposition 3.1.6 ([3]) *Soit (M, J) une variété pseudo-complexe et g une métrique riemannienne J -invariante. S'il existe une suite de courbes pseudo-holomorphes $f_n : \mathbb{D} \rightarrow M$ telles que $\text{aire}(f_n) = O(d^2(f_n(0), f_n(\partial\mathbb{D})))$, alors*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{z \in \mathbb{D}} |f_n'(z)|_{\text{hyp}} = \infty,$$

i.e. M n'est pas g -hyperbolique (et donc si g est une métrique pseudo-Kähler M n'est pas pseudo-Kähler hyperbolique)

Cette proposition est une conséquence immédiate du lemme suivant (obtenu par inégalité de Cauchy-Schwarz) :

Lemme 3.1.5 *Soit (M, J) une variété pseudo-complexe et g une métrique riemannienne g -invariante. Si $f : \mathbb{D}(1) \rightarrow M$ est J -holomorphe, alors f est conforme et vérifie : pour $r \in]0, 1[$,*

$$\max_{|z| \leq r} |f'(z)| \geq \frac{1}{r} (\liminf_{|z| \nearrow 1} d_g(f(0), f(z))) - \frac{(\pi(1-r^2))^{\frac{1}{2}}}{2\pi r^2} (\text{aire}_g f)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.4)$$

Dans le cas particulier de \mathbb{C}^n , on peut considérer la métrique (et donc la distance) euclidienne standard, c'est-à-dire la métrique Kähler associée aux structures standards J_0 et $\omega_0 = dd^c \phi$ avec $\phi = \frac{|z|^2}{4}$. Ainsi dans ce cas particulier, l'hypothèse de la proposition 3.1.6 se lit : $\text{aire}(f_n) = O(\min_{f_n(\partial\mathbb{D})} \phi - \phi(f_n(0)))$.

Il se trouve que la quantité $\min_{f_n(\partial\mathbb{D})} \phi - \phi(f_n(0))$ est étroitement liée, et ce même dans le cas plus général d'une variété de Stein quelconque (M, ω, ϕ, J) , à l'invariant de Nevanlinna $\tau(f_n)$. En effet, pour les variétés de Stein, l'invariant de Nevanlinna (qui est aussi défini pour des variétés symplectiques quelconques) vérifie :

$$\tau(f) = \int_0^{2\pi} \phi \circ f(e^{i\theta}) d\theta - 2\pi \phi \circ f(0) \quad (3.5)$$

C'est pourquoi on aimerait obtenir un résultat similaire à la proposition 3.1.6 qui déduirait la non pseudo-Kähler hyperbolicité de la variété à partir de la comparaison entre $\text{aire}(f_n)$ avec,

$\min_{f_n(\partial\mathbb{D})} \phi - \phi(f_n(0))$ dans le cas de variété de Stein, ou plus généralement avec $\tau(f_n)$ dans le cas de variétés pseudo-Kählers quelconques.

Pour cela, après un bref rappel des définitions de base de la théorie de Nevanlinna, je montrerai un certain nombre de propriétés de l'invariant de Nevanlinna (celui défini pour les variétés symplectiques quelconques) et en déduirai le résultat souhaité. Nous verrons que cette étude nous permet d'obtenir des résultats plus forts que la proposition 3.1.6.

3.2 Un invariant pseudo-Kähler : τ

3.2.1 Brève introduction à la théorie de Nevanlinna

Si M est une variété complexe fermée et D un diviseur de M , la théorie de Nevanlinna a pour but général d'étudier la position de l'image des applications holomorphes $f : \mathbb{C} \rightarrow M$ par rapport à D . Pour cela elle introduit un invariant, appelée souvent **invariant de Nevanlinna** (ou parfois fonction hauteur ou fonction de croissance de Nevanlinna) qui "mesure" la position de $f(\mathbb{D}_r)$ par rapport à D (pour tout r et plus particulièrement pour $r \rightarrow \infty$).

La théorie originelle de Nevanlinna (voir [29] ou [30] pour un compte-rendu plus exhaustif) était défini dans le cas où $M = \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ et $D = \{\infty\}$ le point à l'infini (ou un autre point dans \mathbb{C}). Les fonctions holomorphes sur \mathbb{C} à valeurs dans M étaient alors les fonctions méromorphes sur \mathbb{C} . Celles-ci étaient donc l'objet d'étude de cette première théorie de Nevanlinna. Dans ce cas-là, on définit le fonction de croissance (ou invariant) de Nevanlinna comme la somme de deux autres fonctions : la fonction de dénombrement et la fonction de proximité. Plus précisément, si f est une fonction méromorphe sur \mathbb{C} , la fonction de proximité de f est :

$$m_f(r) = \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Elle mesure la façon dont f se rapproche de l'infini. La fonction de dénombrement, elle, compte le nombre de fois que f atteint l'infini :

$$N_f(r) = \sum_{f(a)=\infty, a \neq 0} -(\text{ord}_a f) \log \left| \frac{r}{a} \right| + n_f(0) \log(r) = \int_0^r (n_f(t) - n_f(0)) \frac{dt}{t} + n_f(0) \log(r)$$

où $n_f(r)$ est le nombre de pôles de f dans $\overline{\mathbb{D}_r}$.

La fonction de croissance de Nevanlinna, ou invariant de Nevanlinna, est alors défini comme la somme des deux :

$$T_f(r) = N_f(r) + m_f(r).$$

Il prend à la fois en compte la façon dont f se rapproche de l'infini et la façon dont elle l'atteint. De même on peut définir une fonction de Nevanlinna similaire qui rend compte de la position de f par rapport à un point quelconque $a \in \mathbb{C}$: on définit

$$m_f(a, r) = \int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta}) - a|} \frac{d\theta}{2\pi}.$$

qui mesure la façon dont f se rapproche de a ,

$$N_f(a, r) = N_{\frac{1}{f-a}}(r)$$

qui compte le nombre de fois où f atteint a et finalement :

$$T_f(a, r) = N_f(a, r) + m_f(a, r).$$

Un des résultats fondamentaux de cette théorie est le premier théorème de fondamental de Nevanlinna :

Théorème 3.2.1 (Premier théorème de Nevanlinna) *Pour tout nombre complexe a*

$$T_f(a, r) = T_f(r) + O_a(1)$$

Plus précisément dans le cas de $a = 0$, si c_f dénote le coefficient de plus bas degré de l'application méromorphe f (i.e. f s'écrit $f(z) = \sum_{i=-n_0}^{\infty} c_i z^i$ et $c_f = c_{-n_0} \neq 0$). Alors,

$$\log |c_f| + T_f(0, r) = T_f. \quad (3.6)$$

Ainsi ce premier théorème fondamental de Nevanlinna exprime le fait que pour toute fonction méromorphe f sur \mathbb{C} , asymptotiquement, la position relative de f par rapport à n'importe quel point de \mathbb{C} ne dépend pas, à une constante additive près, de ce point, et est identique à la position relative de f par rapport à l'infini.

En fait il existe une définition alternative de la fonction de proximité qui prend plus en compte la géométrie de $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$. Dans la définition ci-dessus de m_f on choisit comme fonction de Weil $\lambda_a^0 = \log^+ \frac{1}{|z-a|}$ (on regarde donc la distance euclidienne $|z-a|$). Rappelons qu'une fonction de Weil associée à a est une fonction $\lambda : \mathbb{P}^1\mathbb{C} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que sur un voisinage de a il existe une fonction continue (donc bornée) α telle que $\lambda(z) = -\log |z-a| + \alpha(z)$ sur ce voisinage. Ainsi la différence entre deux fonctions de Weil associées à un même point est une fonction continue (et donc bornée) sur $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$. Mais si on considère le problème du point de vue des fonctions holomorphes à valeurs dans $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ plutôt que de celui des fonctions méromorphes sur \mathbb{C} , il est plus naturel de considérer comme fonction de Weil (comme dans [30]) celle faisant intervenir la distance sur $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$. Si on note cette distance : $\|z, z'\|^2 = \frac{|z-z'|^2}{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)}$ si z et z' sont dans \mathbb{C} et $\|z, \infty\|^2 = \|\frac{1}{z}, 0\|^2 = \frac{1}{1+|z|^2}$, alors $\lambda_a(z) = -\log \|z, a\|$ est bien une fonction de Weil et on peut définir la fonction de proximité par :

$$m_f(a, r) = \int_0^{2\pi} -\lambda_a(f(re^{i\theta})) \frac{d\theta}{2\pi} = \int_0^{2\pi} -\log \|a, f(re^{i\theta})\| \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Elle ne diffère de celle définie plus haut uniquement par une fonction bornée. Alors, en conservant ce point de vue et cette définition de la fonction de proximité m_f , si l'on définit la fonction croissance de Nevanlinna associée à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ par :

$$T_f(a, r) = N_f(a, r) + m_f(a, r) + \log \|f(0), a\|,$$

le premier théorème fondamental de Nevanlinna se lit :

Théorème 3.2.2 (Premier théorème de Nevanlinna) *La fonction $T_f(a, r)$ ne dépend pas de $a \in \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ (dès lors que $f(0) \neq a$). (Dans ce cas on a vraiment une égalité).*

Quel que soit l'énoncé adopté, la preuve de ce théorème repose simplement sur la formule de Jensen.

Une théorie similaire a ensuite été introduite pour $M = \mathbb{P}^n \mathbb{C}$ ([29] pour plus de détails), puis, comme nous le disions dans l'introduction, dans le cadre d'une variété complexe M quelconque. Celle-ci est notamment exposée dans [9], [29] et [30].

L'idée de cette généralisation repose sur une remarque dans le cas de $\mathbb{P}^1 \mathbb{C}$ exposé ci-dessus. Si on considère ω la forme symplectique canonique sur $\mathbb{P}^1 \mathbb{C}$ on vérifie que pour la deuxième définition donnée de la fonction de Nevanlinna (qui rappelons-le ne diffère de la première que par une fonction bornée on a :

$$T_f(r) = (T_r(\infty, r) =) \int_0^r \left(\int_{\mathbb{D}(t)} f^* \omega \right) \frac{dt}{t} \quad (3.7)$$

En effet $f^* \omega = \|f'\|^2 \mu$ avec $\|f'\| = \frac{|f'|}{1+|f|^2}$ et μ la forme euclidienne $\frac{i}{2\pi} dz \wedge d\bar{z}$. Et on montre que $\|f'\|^2 \mu = \frac{1}{2} dd^c \log \|f'\|^2 = dd^c \log(1 + |f|^2) = dd^c \log(|f_0|^2 + |f_1|^2)$, où f s'écrit comme $\frac{f_1}{f_0}$ i.e. où f s'écrit comme $[f_0 : f_1]$ comme fonction holomorphe à valeurs dans $\mathbb{P}^1 \mathbb{C}$. On conclut en utilisant la formule de Green-Jensen appliquée à $\log(1 + |f|^2)$:

$$\int_0^r \int_{\mathbb{D}(t)} dd^c \alpha \frac{dt}{t} = \int_0^{2\pi} \alpha(re^{i\theta}) d\theta - \alpha(0) - \sum_{z_i} ord_{z_i}(f_0)$$

où la somme est prise sur l'ensemble des zéros de f_0 , soit l'ensemble des poles de f .

On en déduit notamment :

$$\begin{aligned} T_f(r) = T_f(a, r) &= \int_0^r \int_{\mathbb{D}(t)} dd^c \log(1 + |f|^2) \frac{dt}{t} \\ N_f(r) &= \int_0^r \int_{\mathbb{D}(t)} dd^c \log |f - a|^2 \frac{dt}{t} \\ T_f(a, r) - N_f(a, r) &= \int_0^r \int_{\mathbb{D}(t)} dd^c -\log ||f, a||^2 \frac{dt}{t} \end{aligned}$$

La formule nous suggère donc de définir dans le cas d'une variété complexe quelconque M la fonction de Nevanlinna associée à une $(1, 1)$ -forme β sur M par : pour toute fonction holomorphe $f : \mathbb{C} \rightarrow M$

$$T_{\eta, f}(r) = \int_0^r \int_{\mathbb{D}(t)} f^* \beta \frac{dt}{t}$$

De même dans le cas d'une variété symplectique munie d'une structure pseudo-complexe compatible on peut définir la fonction de Nevanlinna associée à cette structure symplectique, aussi appelée indicatrice de croissance :

$$T_f(r) = T_{\omega, f}(r) = \int_0^r \int_{\mathbb{D}(t)} f^* \omega \frac{dt}{t} \quad (3.8)$$

Notons que dans le cas de variétés complexes fermées (M, j) , si la forme symplectique ω est la forme de courbure d'un fibré en droites holomorphe sur M muni d'une métrique à courbure

positive, $(L, |\cdot|)$, alors à des constantes additives près (indépendantes de f , la croissance de $T_{f,\omega}(\tau)$ ne dépend pas du choix de la métrique $|\cdot|$. Plus précisément si on considère une autre métrique $|\cdot|_0$ sur le fibré en droites L et ω_0 sa forme de courbure, pour toute $f : \mathbb{C} \rightarrow M$ holomorphe, $T_{f,\omega}(\tau) = T_{f,\omega_0}(\tau) + O(1)$, le $O(1)$ ne dépendant pas de f , et étant majoré par $2 \sup_M \phi$ où $|\cdot| = |\cdot|_0 e^\phi$.

De plus si Σ est une hypersurface définie par $\{\sigma = 0\}$ avec σ une section holomorphe du fibré en droites L on peut alors, si $f : \mathbb{C} \rightarrow M$ est holomorphe, s'intéresser à la position de la courbe f par rapport à Σ . On introduit alors comme précédemment la fonction de dénombrement de zéros

$$N_{f,\sigma}(r) = \int_{r_0}^r n_{f,\sigma}(t) \frac{dt}{t}, \text{ avec } n_{f,\sigma}(t) \text{ le nombre de zéros de } \sigma \circ f \text{ dans } \mathbb{D}(t)$$

et la fonction de proximité :

$$m_{f,\sigma}(r) = \int_0^{2\pi} \log \frac{1}{|\sigma \circ f(re^{i\theta})|} d\theta.$$

Alors on a le premier théorème de Nevanlinna :

Théorème 3.2.3 (Premier théorème fondamental de Nevanlinna) *Soit $(L, |\cdot|)$ un fibré en droites holomorphes au-dessus d'une variété complexe fermée (M, J) à forme de courbure positive ω . Pour toute section holomorphe σ de L (définissant une hypersurface Σ), pour toute fonction holomorphe $f : \mathbb{C} \rightarrow M$ à image non contenue dans Σ ,*

$$N_{f,\sigma}(r) + m_{f,\sigma}(r) = T_{f,\omega}(r) + O(1)$$

En particulier le terme de gauche, qui rend compte de la position de f par rapport à Σ ne dépend pas, à une constante additive près de Σ .

Ce théorème est de nouveau une conséquence de la formule de Green-Jensen car $\omega = dd^c - \log |\sigma|$ sur $M \setminus \Sigma$. Dans le cas où f n'intersecte pas Σ , on a tout simplement :

$$T_{f,\omega}(r) = \int_0^{2\pi} -\log |\sigma \circ f(re^{i\theta})| + \log |\sigma \circ f(0)|$$

Notons enfin que la définition de la fonction de Nevanlinna en (3.8) peut être aussi définie pour des fonctions J -holomorphes $f : \mathbb{D}(R) \rightarrow M$. Ce sont ces différentes idées qui nous conduisent à introduire pour des fonctions holomorphes $f : \mathbb{D} \rightarrow M$ l'invariant de Nevanlinna τ . La théorie de Nevanlinna ayant souvent servi dans l'étude de l'hyperbolicité complexe ([29], [9]), il était naturel de l'introduire dans notre étude, d'autant plus que la définition générale (3.8) s'intégrait parfaitement dans le cadre de l'étude d'une variété pseudo-Kähler.

3.2.2 Définition et propriétés de τ

Soit (M, ω, J) , une variété symplectique munie d'une structure pseudo-complexe compatible. On définit :

Définition 3.2.1 *Si $f : \mathbb{D}(1) \rightarrow M$ est J -holomorphe, on note*

$$\tau(f) = \int_0^1 \frac{d\rho}{\rho} \int_{\mathbb{D}(\rho)} f^* \omega.$$

On montre alors :

Lemme 3.2.1 $\tau(f) = \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 \ln \left(\frac{1}{|z|} \right) (où |v|^2 = \omega(v, Jv)).$

Dém. : Par une intégration par partie, on obtient :

$$\tau(f) = \int_0^1 \ln \left(\frac{1}{\rho} \right) \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\int_{\mathbb{D}_\rho} f^* \omega \right) d\rho.$$

Comme f est J -holomorphe, il s'ensuit que $f^* \omega = |f'(z)|^2 dx \wedge dy$. Ainsi,

$$\tau(f) = \int_0^1 \ln \left(\frac{1}{\rho} \right) \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\int_0^\rho \left(\int_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})|^2 r d\theta \right) dr \right) d\rho,$$

et l'on obtient le résultat souhaité. ■

Comme annoncé à la fin de la partie 3.1.4, dans le cas particulier de variétés de Stein, on a une définition équivalente :

Proposition 3.2.1 Si $\omega = dd^c \psi$, alors pour toute $f : \mathbb{D} \rightarrow M$ J -holomorphe,

$$\tau(f) = \int_0^{2\pi} \psi \circ f(e^{i\theta}) d\theta - 2\pi \psi \circ f(0). \quad (3.9)$$

Dém. : Notons $g = \psi \circ f$. Alors comme f est J -holomorphe, $\tau(f) = \int_0^1 \left(\int_{\mathbb{D}(\rho)} dd^c g \right) \frac{d\rho}{\rho}$. Par le théorème de Stokes, on a

$$\tau(f) = \int_0^1 \left(\int_{\mathbb{S}(\rho)} d^c g \right) \frac{d\rho}{\rho} = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} dg|_{\rho e^{i\theta}}(e^{i\theta}) d\theta \right) d\rho = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\int_0^{2\pi} g(\rho e^{i\theta}) d\theta \right) d\rho.$$

■

On aimerait maintenant montrer, comme souhaité, un résultat similaire à la proposition 3.1.6 qui, en utilisant la fonction τ , fasse le lien entre l'existence de disques pseudo-holomorphes dont on contrôle à la fois l'aire et la position du bord, et la pseudo-Kähler hyperbolicité.

3.2.3 Lien entre les disques pseudo-holomorphes et les hyperbolicités complexes

Proposition 3.2.2 S'il existe $f_n : \mathbb{D} \rightarrow M$, J -holomorphes, telles que $\text{aire}(f_n) = O(\tau(f_n))$, alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{z \in \mathbb{D}} |f_n'(z)|_{\text{hyp}} = \infty.$$

Ainsi, M n'est pas (ω, J) -hyperbolique.

Corollaire 3.2.1 Soit (M, J, ω, ψ) une variété de Stein. S'il existe une suite de disques pseudo-holomorphes $f_n : \mathbb{D} \rightarrow M$ avec $f_n(\partial \mathbb{D}) \subset \{\psi = a_n\}$, $f_n(0) = x_0$ et $\text{aire}(f_n) = O(a_n)$, alors M n'est pas pseudo-Kähler hyperbolique.

Ce corollaire est une conséquence immédiate de la proposition car avec les hypothèses ci-dessus $\tau(f_n) = a_n - 2\pi\psi(x_0)$.

Dém. : (de la proposition 3.2.2) D'après le lemme 3.2.1, on a

$$\tau(f_n) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 |f_n'(re^{i\theta})|^2 \ln\left(\frac{1}{r}\right) r dr d\theta.$$

Ainsi en coupant l'intégrale "intérieure" de 0 à 1 en R avec $0 < R < 1$:

$$\int_0^1 |f_n'(re^{i\theta})|^2 \ln\left(\frac{1}{r}\right) r dr \leq A R \sup_{r \leq R} |f_n'(re^{i\theta})|^2 + \ln\left(\frac{1}{R}\right) \int_R^1 |f_n'(re^{i\theta})|^2 r dr d\theta,$$

où $A = \max_{[0,1]} \ln\left(\frac{1}{r}\right) r \geq \max_{[0,R]} \ln\left(\frac{1}{r}\right) r$. En intégrant par rapport à θ on obtient

$$\tau(f_n) \leq A' R \sup_{\mathbb{D}_R} |f_n'(z)|^2 + \text{aire}(f_n) \ln\left(\frac{1}{R}\right).$$

Ainsi,

$$\sup_{\mathbb{D}_R} |f_n'(z)|^2 \geq \frac{\tau(f_n)}{A'} \left(1 - \ln\left(\frac{1}{R}\right) \frac{\text{aire}(f_n)}{\tau(f_n)}\right).$$

Par hypothèse, il existe $B > 0$ tel que $\frac{\text{aire}(f_n)}{\tau(f_n)} \leq B$, il existe donc un $R < 1$ tel que

$$\sup_{\mathbb{D}_R} |f_n'(z)|^2 \geq \frac{\tau(f_n)}{2A'} \rightarrow \infty.$$

Finalement $\sup_{\mathbb{D}} |f_n'(z)|_{\text{hyp}}^2 \geq (1 - R^2) \sup_{\mathbb{D}_R} |f_n'(z)|^2 \rightarrow \infty$. ■

Notons que si $g = \omega(., J.)$ est la métrique associée à ω et J , on a, pour f J -holomorphe, $\tau(f) \geq 4\pi d_g^2(f(0), f(\partial\mathbb{D}))$. En effet pour tout θ ,

$$\begin{aligned} d_g^2(f(0), f(\partial\mathbb{D})) &\leq \left(\int_0^1 |f'(re^{i\theta})| dr\right)^2 \\ &\leq \left(\int_0^1 |f_n'(re^{i\theta})|^2 \ln\left(\frac{1}{r}\right) r dr\right) \left(\int_0^1 \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{r}\right) r} dr\right). \end{aligned}$$

La dernière intégrale valant $\frac{1}{2}$, on a le résultat souhaité en intégrant cette dernière inégalité par rapport à θ . La proposition 3.2.2 est donc plus forte que la proposition 3.1.6 (l'hypothèse est plus faible, parfois la même dans certains cas comme celui de B^{2n}), et elle sera particulièrement utile dans les cas où la proposition 3.1.6 ne peut être utilisée, comme par exemple dans le cas où la variété a un diamètre borné (voir l'exemple des polarisations sous-critiques ...).

Une autre proposition permet, sous des hypothèses plus fortes, de montrer directement la non-Kobayashi-hyperbolicité (la proposition précédente n'implique la Kobayashi-hyperbolicité que dans le cas compact) :

Proposition 3.2.3 *On considère (M, ω, J) et on suppose qu'il existe une fonction ψ telle que $dd^c\psi = \omega$. S'il existe $f_n : \mathbb{D} \rightarrow M$, J -holomorphes, telles que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tau(f_n)}{\text{aire}(f_n)} = \infty$ (soit $\text{aire}(f_n) = o(\tau(f_n))$), et $f_n(0) = x_0$, alors :*

$$\forall r > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{z \in \mathbb{D}_r} |f_n'(z)|_{\text{hyp}} = \infty,$$

et M n'est pas Kobayashi-hyperbolique.

Dém. : Notons $C_r = [0, r] \times [0, 2\pi]$, $A_r = [r, 1] \times [0, 2\pi]$ et $\tau_r(f_n) = \int_{C_r} |f_n'|^2 \ln\left(\frac{1}{t}\right) t dt d\theta$. Alors $\tau(f_n) = \tau_r(f_n) + \int_{A_r} |f_n'|^2 \ln\left(\frac{1}{t}\right) t dt d\theta$. Ainsi,

$$\tau_r(f_n) \geq \tau(f_n) - \ln\left(\frac{1}{r}\right) \text{aire}(f_n(A_r)) \geq \tau(f_n) \left(1 - \ln\left(\frac{1}{r}\right) \frac{\text{aire}(f_n)}{\tau(f_n)}\right). \quad (3.10)$$

Or, la même inégalité de Cauchy-Schwarz que dans la preuve précédente permet de montrer qu'il existe une constante A telle que $\forall n, \tau_r(f_n) \leq A \sup_{\mathbb{D}_r} |f_n'|_{\text{hyp}}$.

Ainsi, vu l'inégalité (3.10), on en déduit le premier résultat souhaité.

Pour montrer que M est non Kobayashi-hyperbolique, on va utiliser le lemme :

Lemme 3.2.2 *Soit V_0 un ouvert relativement compact contenant x_0 . Alors, si f_n vérifie les hypothèses de la proposition, $\forall r > 0, \exists n_0 / \forall n > n_0, f_n(\mathbb{D}_r) \not\subset V_0$.*

Dém. : On a (on le montre comme on avait montré les premières propriétés sur τ) : $\int_0^{2\pi} (\psi \circ f_n)(re^{i\theta}) d\theta - 2\pi\psi \circ f_n(0) = (-\ln(\frac{1}{r})) \left(\int_{D_r} f_n^* \omega \right) + \tau_r(f_n)$. Or ψ est bornée sur V_0 . Il existe donc une constante A (ne dépendant que de V_0) telle que si $f_n(\mathbb{D}_r) \subset V_0$,

$$\ln\left(\frac{1}{r}\right) \geq \frac{1}{\text{aire}(f_n(\mathbb{D}(r)))} (\tau_r(f_n) - A).$$

D'où, d'après l'inégalité (3.10), $\ln\left(\frac{1}{r}\right) \geq \frac{1}{\text{aire}(f_n)} (\tau(f_n) - A)$, qui tend vers l'infini. On démontre ainsi le lemme. ■

Ainsi, $\forall m, \exists n_m / f_{n_m}(D_{\frac{1}{m}}) \not\subset V_0$. Il existe donc $z_m \in D_{\frac{1}{m}}$, tel que $p_m = f_{n_m}(z_m) \in \partial V_0$.

La pseudo-distance de Kobayashi $d_K(x_0, p_m) \leq d_{\text{hyp}}(0, z_m)$, donc tend vers 0 quand $m \rightarrow \infty$. Or, il existe une sous-suite de (p_m) qui converge vers $p \in \partial V_0$ (donc $p \neq x_0$). Alors $d_K(p, x_0) = 0$ et la variété n'est pas Kobayashi-hyperbolique. ■

3.2.4 Capacité pseudo-Kähler

L'énoncé de ces propositions nous amènent à considérer la quantité, associée à une variété symplectique (M, ω) à bord munie d'une structure pseudo-complexe compatible J :

$$\tau_J(M, \omega) = \sup_{x_0 \in M} \inf_{f \in \mathcal{T}(M, J, x_0)} \tau(f), \quad (3.11)$$

où l'on définit pour $x_0 \in M$, $\mathcal{T}(M, J, x_0) = \{f : \mathbb{D} \rightarrow M, J - \text{holomorphe}, f(\partial\mathbb{D}) \subset \partial M, f(0) = x_0\}$. (On notera parfois $\tau_J(M, \omega, x_0) = \inf_{f \in \mathcal{T}(M, J, x_0)} \tau(f)$).

D'après la remarque faite précédemment, $\tau_J(M, \omega) \geq 4\pi \sup_{x_0 \in M} d_g^2(x_0, \partial M) = \pi \text{diam}(M)^2$. Elle est donc non nulle et il s'agit donc d'un invariant non trivial.

On peut voir cette quantité $\tau_J(M, \omega) = \tau(M, \omega, J)$ comme une "capacité pseudo-Kähler", c'est-à-dire qu'elle est :

$$\begin{cases} \text{Monotone : } \tau(M', \omega', J') \leq \tau(M, \omega, J) \text{ s'il existe un plongement } (M', \omega', J') \rightarrow (M, \omega, J) \\ \text{Conforme : } \tau(M, \alpha\omega, J) = |\alpha| \tau(M, \omega, J) \text{ pour tout } \alpha \neq 0 \\ \text{Non triviale : } \tau(B^{2n}(r), \omega_0, J_0) \neq 0 \text{ et } \tau(B^{2n_2}(r) \times \mathbb{C}, \omega_0, J_0) \neq \infty \end{cases}$$

En fait on a $\tau(B^{2n}(r), \omega_0, J_0) = \frac{r^2}{4}$. Et plus généralement, dans le cas de variétés de Stein, la proposition 3.2.1 nous donne une expression explicite de τ_J .

Lemme 3.2.3 *Si (M_a, ω, J, ψ) est un domaine de Stein, avec $\text{dd}_J^c \psi = \omega$ et $M_a = \{\psi \leq a\}$, alors*

1. *soit $\mathcal{T}(M_a, J, x_0)$ est vide et $\tau_J(M_a, \omega, x_0) = \infty$*
2. *sinon $\tau_J(M_a, \omega, x_0) = a - \psi(x_0)$.*

Ainsi $\tau_J(M_a, \omega) = a - (\inf_{M_a} \psi)$.

En effet pour toute application $f : \mathbb{D} \rightarrow M \in \mathcal{T}(M, J, x_0)$, d'après la proposition 3.2.1 $\tau(f) = a - \psi(x_0)$.

Ainsi si (M, ω, ψ, J) est une variété de Stein et que l'on note comme d'habitude $M_a = \{\psi \leq a\}$, $\tau_J(M_a, \omega)$ est (à une constante près que l'on peut toujours supposer nulle en ajoutant une constante à ψ) égale à a . Ainsi, considérer la croissance de la capacité symplectique $\mu(M_a)$ en a est la même chose que comparer la croissance de $\mu(M_a)$ par rapport à $\tau_J(M_a, \omega)$. Ainsi notre définition 2.2.3 de symplectique hyperbolicité pour les variétés de Stein (ou S -symplectique hyperbolicité) se lit : M est symplectique hyperbolique si $\frac{\mu(M_a)}{\tau_J(M_a, \omega)} \rightarrow \infty$. Ainsi, on peut généraliser notre notion de S -symplectique hyperbolicité aux variétés symplectique quelconques en énonçant l'hyperbolicité symplectique comme :

Exemple 3.2.1 *Soit (M, ω) une variété symplectique . Pour J une structure pseudo-complexe compatible avec ω , on dit que (M, ω) est τ_J -symplectique hyperbolique, si pour toute suite croissante (M_j) de domaines J -convexes,*

$$\frac{\mu(M_j)}{\tau_J(M_j, \omega)} \rightarrow \infty.$$

Dans le cas d'une variété de Stein (M, ω, J, ψ) la τ_J -symplectique hyperbolicité est juste la S -symplectique hyperbolicité.

Deuxième partie

Interface entre hyperbolicité symplectique et pseudo-complexe

Chapitre 4

Premiers liens entre hyperbolicité symplectique et complexe

Comme je l'avais annoncé, les disques pseudo-holomorphes vont me servir de lien entre l'hyperbolicité symplectique et pseudo-complexe. Comme (via l'introduction de l'hyperbolicité pseudo-Kähler) j'ai d'ores et déjà étudié le lien entre l'hyperbolicité pseudo-complexe et l'existence de certains disques pseudo-holomorphes, il me reste maintenant à étudier le lien entre l'hyperbolicité symplectique et l'existence de disques pseudo-holomorphes :

4.1 Construction de disques pseudo-holomorphes

Pour cela, je vais dans un premier temps montré que la non-hyperbolicité symplectique d'une variété M à bord de type contact implique l'existence (pour toute structure pseudo-complexe J compatible qui préserve la structure de contact) d'un disque J -holomorphe d'aire inférieure à la capacité $\mu(M)$ et dont le bord est inclus dans le bord de M .

Théorème 4.1.1 *Soit (M, ω, J) une variété symplectique, à bord de type contact, munie d'une structure pseudo-complexe compatible J préservant les hyperplans de contact de ∂M (et donc ∂M est J -convexe).*

Si $FH^n(M, -\delta, \mu) \longrightarrow H^{2n}(M, \partial M)$ n'est pas surjective, alors il existe $v : \mathbb{D} \rightarrow M$, J -holomorphe, d'aire inférieure à μ , telle que $v(\partial\mathbb{D}) \subset \partial M$.

En d'autres termes, si M est non symplectique hyperbolique, alors il existe $v : \mathbb{D} \rightarrow M$ d'aire inférieure à la capacité de M $\mu(M)$ et telle que $v(\partial\mathbb{D}) \subset \partial M$.

Pour démontrer ce théorème on va utiliser les définitions et propriétés de la cohomologie de Floer présentées au chapitre 2. Après avoir construit une suite d'Hamiltoniens adaptés, l'hypothèse nous fournira une suite de trajectoires de Floer. En utilisant des théorèmes de compacité pour les trajectoires de Floer analogues à celui de Gromov pour les courbes pseudo-holomorphes, on montre que celle-ci converge (après un "découpage approprié" grâce à la J -convexité du bord) vers un disque pseudo-holomorphe.

4.1.1 Construction d'une suite d'Hamiltoniens adaptés

Soit $\mu \notin \mathcal{S}(\Sigma)$ vérifiant l'hypothèse du théorème : $FH^n(M, -\delta, \mu) \longrightarrow H^{2n}(M, \partial M)$ n'est pas surjective. Il existe η tel que $]\mu - \eta, \mu + \eta] \cap \mathcal{S}(\Sigma) = \emptyset$.

70 CHAPITRE 4. PREMIERS LIENS ENTRE HYPERBOLICITÉ SYMPLECTIQUE ET COMPLEXE

Alors, d'après les résultats de la partie 2 (proposition 2.1.2 et (2.6)), pour tout $\lambda > \mu$,

$$FH^n(K_\lambda, -\delta, \mu) \longrightarrow FH^n(K_\lambda, -\delta, \delta) \quad (4.1)$$

est non surjective.

De plus, pour tout $\lambda > \mu$, il est possible de construire des suites ν_λ et ϵ_λ ($\epsilon_\lambda < \delta$) aussi petites que souhaité (et ainsi $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \nu_\lambda = 0$ $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \epsilon_\lambda = 0$), vérifiant $2\nu_\lambda(\mu - \eta) + \epsilon_\lambda < \eta$, $2\nu_\lambda(\mu + \eta) - \epsilon_\lambda < \eta$, et $\epsilon_\lambda < \lambda\nu_\lambda$.

On introduit alors H_λ , hamiltonien C^∞ sur \tilde{M} , qui vaut :

$$\begin{cases} (i) & -\epsilon_\lambda \text{ sur } M \\ (ii) & h_\lambda(z) \text{ sur } M_{[1, 1+2\nu_\lambda]}, \text{ with } h_\lambda \text{ une fonction convexe sur } [1, 1+2\nu_\lambda], \\ (iii) & \lambda(z - (1 + \nu_\lambda)) \text{ sur } \Sigma \times [1 + 2\nu_\lambda, \infty[. \end{cases}$$

Un tel hamiltonien existe car $\epsilon_\lambda + \lambda\nu_\lambda < 2\lambda\nu_\lambda$. Et il vérifie :

$$\begin{cases} FH^*(K_\lambda, -\delta, \mu) \simeq FH^*(H_\lambda, -\delta, \mu) \\ FH^*(K_\lambda, -\delta, \delta) \simeq FH^*(H_\lambda, -\delta, \delta). \end{cases} \quad (4.2)$$

En effet, il y a une correspondance biunivoque entre les orbites non constantes de H_λ et les caractéristiques fermées de Σ d'action $T \in \mathcal{S}(\Sigma)$ pour lesquelles il existe $z \in [1, 1 + 2\nu_\lambda]$ vérifiant $h'_\lambda(z) = T$ (ce qui implique $T < \lambda$), i.e. exactement les orbites non constantes de K_λ d'action T . De plus, l'orbite de H_λ associée a alors pour action $zT - h_\lambda(z)$.

Or, par construction, si $T < \mu$, alors $T < \mu - \eta$ et $zT - h_\lambda(z) \leq (1 + 2\nu_\lambda)(\mu - \eta) + \epsilon_\lambda < \mu$. De même, on vérifie que si $T > \mu$ alors $zT - h_\lambda(z) > \mu$.

Par un raisonnement identique, si $T > \delta$, alors $T > T_0$ (comme $h(z) = -\epsilon_\lambda + \int_1^z h'(z) \leq -\epsilon_\lambda + (z - 1)T$, on a $zT - h(z) \geq T_0 + \epsilon_\lambda > \delta$.) On montre de même que si $T < \delta$, alors $zT - h_\lambda(z) < \delta$.

Soient $y_1, \dots, y_N \in M \setminus V$ des points de M fixés tels que $H^{2n}(M, \partial M) (\simeq H_0(M)) \simeq \bigoplus_{j=1}^N \mathbb{Z}_2 \cdot [y_j]$ (quitte à se restreindre à une composante connexe de M , on écrira parfois pour simplifier les notations juste $H^{2n}(M, \partial M) = \mathbb{Z}_2[y_0]$) et fixons $\lambda > \mu, \notin \mathcal{S}(\Sigma)$.

On considère une fonction lisse f_λ sur M telle que :

$$\begin{cases} (i) & f_\lambda \text{ est une fonction de Morse et vérifie } -1 \leq f_\lambda \leq 0 \text{ sur } M_{1-\nu_\lambda} \\ (ii) & f_\lambda \text{ a des minima relatifs uniquement en } y_1, \dots, y_N \\ (iii) & f_\lambda(x, z) = z - (1 - \nu_\lambda) \text{ sur } M_{[1-\nu_\lambda, 1]}. \end{cases} \quad (4.3)$$

On considère alors pour α petit $H_{\lambda, \alpha}$, un hamiltonien C^∞ défini par :

$$H_{\lambda, \alpha} = \begin{cases} (i) & -\epsilon_\lambda + \alpha f_\lambda \text{ on } M \\ (ii) & g_{\lambda, \alpha}(z) \text{ sur } M_{[1, 1+2\nu_\lambda]}, \text{ où } g_{\lambda, \alpha} \text{ est une fonction convexe} \\ & \text{quelconque sur } [1, 1 + 2\nu_\lambda] \text{ dont la pente varie de } \alpha \text{ à } \lambda \\ & \text{et telle que } \lim_{\alpha \rightarrow 0} g_{\lambda, \alpha} = g_\lambda \text{ dans } C^\infty \\ (iii) & \lambda(z - 1 - \nu_\lambda) \text{ sur } \Sigma \times [1 + 2\nu_\lambda, \infty[. \end{cases}$$

On sait alors qu'on peut perturber J dans $M_{[1-\nu_\lambda, 1]}$ en une structure générique $J_{\lambda, \alpha}$ aussi proche de J que souhaité afin de rendre admissibles toutes les trajectoires reliant une orbite associée à un point critique de f et une associée à une orbite de Σ . Ainsi, on a $\lim_{\alpha \rightarrow 0} J_{\lambda, \alpha} = J$ et $\lim_{\alpha \rightarrow 0} H_{\lambda, \alpha} = H_\lambda$ dans \mathcal{C}^∞ .

Il s'ensuit que pour α suffisamment petit :

$$\begin{cases} FH^*(H_{\lambda, \alpha}, J_{\lambda, \alpha}, -\delta, \mu) \simeq FH^*(H_\lambda, J, -\delta, \mu) \\ FH^*(H_{\lambda, \alpha}, J_{\lambda, \alpha}, -\delta, \delta) \simeq FH^*(H_\lambda, J, -\delta, \delta). \end{cases} \quad (4.4)$$

En effet, comme δ et $\mu \notin \mathcal{S}(\Sigma)$, pour α suffisamment petit le diagramme de Cerf entre H_λ et $H_{\lambda, \alpha}$ est trivial (voir [39]) : si on considère un chemin d'Hamiltoniens (H_t) entre les deux les chemins des actions des (H_t) ne croisent pas les valeurs δ et μ .

4.1.2 Disques pseudo-holomorphes

On déduit donc de (4.1) et des isomorphismes (4.2) et (4.4) que pour α suffisamment petit, $FH^n(H_{\lambda, \alpha}, J_{\lambda, \alpha}, -\delta, \mu) \xrightarrow{c_{\lambda, \alpha}^n} FH^n(H_{\lambda, \alpha}, J_{\lambda, \alpha}, -\delta, \delta)$ est non surjective. Et donc, vu que

$$\longrightarrow FH^n(H_{\lambda, \alpha}, J_{\lambda, \alpha}, -\delta, \mu) \xrightarrow{c_{\lambda, \alpha}^n} FH^n(H_{\lambda, \alpha}, J_{\lambda, \alpha}, -\delta, \delta) \xrightarrow{\partial^n} FH^{n+1}(H_{\lambda, \alpha}, J_{\lambda, \alpha}, \delta, \mu) \rightarrow$$

est une suite exacte, l'application

$$\partial^n : FH^n(H_{\lambda, \alpha}, J_{\lambda, \alpha}, -\delta, \delta) \rightarrow FH^{n+1}(H_{\lambda, \alpha}, J_{\lambda, \alpha}, \delta, \mu)$$

est non nulle.

De plus, par définition de f_λ dans (4.3),

$$FH^n(H_{\lambda, \alpha}, -\delta, \delta) \simeq H^{2n}(M, \partial M) (\simeq H_0(M)) \simeq \bigoplus_{j=1}^N \mathbb{Z}_2 \cdot [y_j].$$

Ainsi $\exists j$ tel que $\partial^n[y_j] \neq 0$. Quitte à extraire une sous-suite on peut supposer qu'il s'agit toujours du même y_{j_0} et on notera $y_0 = y_{j_0}$. Ainsi, il existe au moins une orbite $\gamma_{\lambda, \alpha} \in C^{n+1}(H_{\lambda, \alpha}, \delta, \mu)$ telle que $\langle \partial[y_0], \gamma_{\lambda, \alpha} \rangle = 1$. Cela implique que $\delta \leq \mathcal{A}_H(\gamma_{\lambda, \alpha}) \leq \mu$ et donc que $\gamma_{\lambda, \alpha}$ est une orbite associée à une caractéristique fermée du bord.

Il existe donc une trajectoire de Floer $u_{\lambda, \alpha} : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow \widetilde{M}$ entre $\gamma_{\lambda, \alpha}$ et y_0 telle que

$$\begin{cases} (i) & \bar{\partial}_{J_{\lambda, \alpha}} u_{\lambda, \alpha} = \nabla H_{\lambda, \alpha} \\ (ii) & \lim_{s \rightarrow +\infty} u_{\lambda, \alpha}(s, t) = y_0 \\ (iii) & \lim_{s \rightarrow -\infty} u_{\lambda, \alpha}(s, \cdot) = \gamma_{\lambda, \alpha} \\ (iv) & E_H(u_{\lambda, \alpha}) = \mathcal{A}_H(\gamma_{\lambda, \alpha}) - \mathcal{A}_H(y_0) \leq \mu + \epsilon_\lambda + \alpha. \end{cases}$$

De plus, par définition de $H_{\lambda, \alpha}$, nécessairement $\gamma_{\lambda, \alpha} \subset S_t$, avec $t \in [1, 1 + 2\nu_\lambda]$. Et donc, comme les trajectoires de Floer ne peuvent être tangentes aux surfaces $\Sigma \times \{z\}$, pour $z \geq 1$, on en déduit que $u_{\lambda, \alpha}(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1) \subset M_{1+2\nu_\lambda}$.

Remarque 4.1.1 Afin d'obtenir cette trajectoire, on doit d'abord approcher $H_{\lambda,\alpha}$ par des hamiltoniens non-autonomes dont toutes les orbites sont non-dégénérées (cf [24]).

Alors, en utilisant la même méthode que dans [24] (en utilisant les théorèmes de compacité pour les trajectoires de Floer), on peut prendre la limite pour $\alpha \rightarrow 0$. Comme $\lim_{\alpha \rightarrow 0} H_{\lambda,\alpha} = H_\lambda$ et $\lim_{\alpha \rightarrow 0} J_{\lambda,\alpha} = J$ dans \mathcal{C}^∞ , on obtient des applications $u_\lambda : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \rightarrow M$ vérifiant :

$$\begin{cases} (i) & \bar{\partial}_J u_\lambda = \nabla H_\lambda \\ (ii) & \lim_{s \rightarrow +\infty} u_\lambda = y_0 \\ (iii) & \lim_{s \rightarrow -\infty} u_\lambda = \gamma_\lambda, \text{ où } \gamma_\lambda \text{ est une orbite 1-periodique de } H_\lambda, \\ & \gamma_\lambda \subset S_{t_\lambda} \text{ avec } t_\lambda \in [1, 1 + 2\nu_\lambda]. \\ (iv) & E_H(u_\lambda) \leq \mu + \epsilon_\lambda. \end{cases}$$

D'autre part, on remarque que l'on peut identifier $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ à \mathbb{C}^* via

$$\phi = \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 & \rightarrow \mathbb{C}^* \\ (s, t) & \rightarrow \exp(-(s + it)) \end{cases}$$

Ainsi, en considérant $\widetilde{u}_\lambda = u_\lambda \circ \phi^{-1}$, on obtient une application de \mathbb{C}^* dans M , ayant pour limite y_0 en 0, et sortant hors de M au voisinage de l'infini.

Alors, il existe $z_\lambda \in]1 - 2\nu_\lambda, 1]$ (on peut le choisir génériquement et donc aussi proche de 1 que souhaité) tel que $(z \circ \widetilde{u}_\lambda)^{-1}\{z_\lambda\}$ soit une sous-variété compacte de dimension 1, V_λ , de \mathbb{C}^* . Ce z_λ étant fixé, soit D_λ le plus grand disque topologique de \mathbb{C} tel que $\partial D_\lambda \subset V_\lambda$ et $0 \in D_\lambda$ (c'est possible car $\lim_{z \rightarrow 0} \widetilde{u}_\lambda = y_0$ et $z(y_0) \leq 1 - \epsilon_0 < z_\lambda$).

Comme les trajectoires de Floer ne peuvent être tangentes à $\Sigma \times \{z\}$ pour $z > 1$, il s'ensuit que $\widetilde{u}_\lambda(D_\lambda^*) \subset M$.

Vu que $\nabla H_\lambda = 0$ à l'intérieur de M , $\bar{\partial} \widetilde{u}_\lambda = 0$ sur D_λ^* (en effet $\bar{\partial}_J u_\lambda = d\widetilde{u}_\lambda(v) + J d\widetilde{u}_\lambda(i v)$ avec $v = -\exp(-s - it)$), et l'application $\widetilde{u}_\lambda|_{D_\lambda^*}$ est donc J -holomorphe. De plus, on remarque que cette application est d'aire bornée. En effet, comme elle est J -holomorphe, si on note $Z_\lambda = \phi^{-1}(D_\lambda^*) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$:

$$\text{aire}(\widetilde{u}_\lambda(D_\lambda^*)) = \int_{D_\lambda^*} \widetilde{u}_\lambda^* \omega = \int_{Z_\lambda} \left| \frac{\partial(u_\lambda)}{\partial s} \right|^2 \leq E_H(u_\lambda) \leq \mu + \epsilon_\lambda.$$

L'inégalité est une conséquence immédiate de l'expression de l'énergie E_H dans (2.3).

Qui plus est, comme elle a une limite finie en 0, on en déduit que \widetilde{u}_λ se prolonge J -holomorphiquement en une fonction holomorphe sur D_λ entier.

Finalement, \widetilde{u}_λ est une application holomorphe sur D_λ , d'aire inférieure à $\mu + \epsilon_\lambda$ et telle que $\widetilde{u}_\lambda(\partial D_\lambda) \subset M_{[1-2\nu_\lambda, 1]}$ et $\widetilde{u}_\lambda(0) = y_0$.

Considérons θ un biholomorphisme de D_λ sur le disque unité \mathbb{D} qui envoie 0 sur 0. Alors pour tout $\lambda > \mu$, $v_\lambda = \widetilde{u}_\lambda \circ \theta^{-1}$ est une application J -holomorphe de \mathbb{D} dans M avec $v_\lambda(0) = y_0$, $v_\lambda(\partial \mathbb{D}) \subset M_{[1-2\nu_\lambda, 1]}$ et $\text{aire}(v_\lambda) \leq \mu + \epsilon_\lambda$. Comme ν_λ et ϵ_λ tendent vers 0 quand λ tend vers l'infini, on a ainsi démontré le théorème.

On a vu (proposition 2.2.1) que les domaines de Stein sous-critiques n'étaient pas symplectique hyperboliques. On a donc un corollaire immédiat :

Corollaire 4.1.1 *Si (M, J, ω, ψ) est un domaine de Stein sous-critique, alors il existe un disque holomorphe $v : \mathbb{D} \rightarrow M$ d'aire inférieure à la capacité symplectique $\mu(M, \omega)$ et donc le bord est inclus dans ∂M .*

Ainsi, pour tous les domaines $\{\psi \leq a\}$ d'une variété de Stein sous-critique, on pourra construire un disque J -holomorphe vérifiant les propriétés énoncées dans le théorème 4.1.1. On obtiendra ainsi une suite de disques pseudo-holomorphes “de plus en plus grands” qui nous laissent espérer des propriétés de non-hyperbolicité complexe. L'exemple des variétés de Stein apparaîtra donc souvent par la suite.

Plus généralement, l'existence des disques holomorphes fournis par le théorème 4.1.1 dans le cas de variétés non symplectique hyperboliques et leurs propriétés vont, grâce aux propriétés de la partie 3, constituer le lien entre la non-hyperbolicité symplectique et la non-hyperbolicité complexe.

En effet, par exemple dans le cas où M est l'union croissante d'ouverts relativement compacts M_n à bord J -convexe, si M est non symplectiquement hyperbolique, alors $\mu(M_n) < \infty$, et on aura l'existence de disques J -holomorphes à bord dans ∂M_n et d'aire inférieure à $\mu(M_n)$. En utilisant la technologie introduite au chapitre 3, nous allons voir que si M est suffisamment non symplectique hyperbolique, (*i.e.* si $\mu(M_n)$ a une croissance suffisamment lente), ces disques impliquent une non-hyperbolicité complexe de la variété. Ainsi nous montrerons que si M est suffisamment non symplectique hyperbolique, alors elle n'est pas complexe hyperbolique.

4.2 Hyperbolicité complexe \Rightarrow Hyperbolicité symplectique

Je vais maintenant utiliser toutes les notions et tous les résultats obtenus dans les parties précédentes afin de prouver que la non-hyperbolicité symplectique implique la non-hyperbolicité pseudo-complexe pour toute structure pseudo-complexe compatible “respectant la structure ω — convexe”.

Cette dernière restriction sur la structure pseudo-complexe pourra être supprimée dans le cas de variétés dont la géométrie est “bien bornée” mais cela demandera un peu plus de travail et cela fera l'objet du chapitre suivant.

En fait, plus précisément nous montrerons que la non symplectique hyperbolicité implique la non pseudo-Kähler hyperbolicité mais, on sait grâce au théorème 3.1.5 et aux corollaires 3.1.1 et 3.1.2 que dans de nombreux cas c'est équivalent aux autres pseudo-complexes hyperbolicités (en utilisant le lemme classique de reparamétrisation de Brody pour passer de la suite de disques pseudo-holomorphes donnée par la négation de la non pseudo-Kähler hyperbolicité à un plan pseudo-holomorphe).

4.2.1 Théorèmes de base

Considérons une variété symplectique (M, ω) qui ne soit pas fortement symplectique hyperbolique, ce qui assure que la capacité des domaines compacts n'est pas égale à l'infini. Soit J une structure pseudo-complexe compatible avec ω pour laquelle M est convexe à l'infini, c'est-à-dire l'union croissante d'une suite d'ouverts $(M_j)_j$ relativement compacts J -convexes. Alors pour tout j , $\mu(M_j) < \infty$.

Ainsi, d'après le théorème 4.1.1, pour tout j , il existe alors un disque pseudo-holomorphe $v_j :$

$\mathbb{D} \rightarrow M_j$ avec pour tout j $v_j(0) = x_0$ (un point fixé de M), $\text{aire}(v_j) \leq \mu(M_j)$ et dont le bord $v_j(\partial\mathbb{D}) \subset \partial M_j$. On obtient donc une suite de disques pseudo-holomorphes dont on contrôle à la fois l'aire et la position du bord ; on souhaite donc appliquer les propositions 3.1.6, 3.2.2, et 3.2.3 de la partie 3 pour en déduire la non-hyperbolicité complexe de la variété. On est donc amené à comparer la croissance des $\mu(M_j)$ avec la quantité "métrique" $d_g(x_0, \partial M_j)$ ou bien avec la capacité pseudo-Kähler $\tau(M_j, \omega, J)$. Et ainsi j'obtiens un premier résultat :

Théorème 4.2.1 *Soit (M^{2n}, ω) une variété symplectique convexe à l'infini non fortement symplectique hyperbolique.*

- Pour toute structure pseudo-complexe J compatible avec ω , si M n'est pas τ_J -symplectique hyperbolique, i.e. s'il existe une suite de domaines J -convexes avec $\mu(M_j) = O(\tau(M_j, \omega, J))$,
 - Ou : pour toute structure pseudo-complexe J compatible avec ω et qui respecte la structure de contact d'une suite croissante de domaines ω -convexes M_j , si M vérifie l'hypothèse de non-hyperbolicité symplectique $\mu(M_j) = O(d_g^2(\partial M_j, x_0))$ (un point x_0 de M étant fixé)¹,
- Alors, M n'est pas pseudo-Kähler-hyperbolique. Et dans de nombreux cas (voir chapitre 4), nous pouvons déduire de cette pseudo-Kähler-hyperbolicité, l'hyperbolicité complexe de (M, J) .
De plus si $\mu(M_j) = o(\tau(M_j, \omega, J))$, alors (M, J) n'est pas Kobayshi-hyperbolique.

Ce théorème peut-être, par contraposée, traduit en une version "positive" :

Corollaire 4.2.1 *Soit (M^{2n}, ω) une variété symplectique convexe à l'infini. Si J est une structure pseudo-complexe compatible pour laquelle M est pseudo-Kähler hyperbolique, alors (si on note g la métrique associée à ω et J) (M, ω) est symplectique hyperbolique : pour toute suite croissante exhaustive de domaines M_j J -convexes ,*

$$\frac{\mu(M_j)}{d_g^2(\partial M_j, x_0)} \rightarrow \infty \quad \text{et} \quad \frac{\mu(M_j)}{\tau(M_j, \omega, J)} \rightarrow \infty$$

Dans le cas de variétés compactes j'en déduis :

Théorème 4.2.2 *Soit (M, ω) une variété symplectique ω -convexe, non symplectique hyperbolique : il existe une suite (M_j) croissante avec $\widetilde{M} = \cup_i M_j$ telle que $\mu(M_j) = O(d_g(x_0, \partial M_j)^2)$. Alors pour toute structure pseudo-complexe compatible avec ω respectant cette structure ω -convexe (c'est-à-dire tel que son relevé \tilde{J} respecte la structure de contact des ∂M_j), (M, J) est non complexe hyperbolique .*

Notons que dans ce cas toutes les hyperbolicités complexes sont équivalentes et il est donc inutile de préciser. On a donc le corollaire (par contraposée) :

Théorème 4.2.3 *Soit (M, ω) une variété compacte ω -convexe. Si existe une structure pseudo-complexe compatible J telle que (M, J) soit complexe hyperbolique, alors (M, ω) est complexe hyperbolique : pour toute suite croissante M_j de domaines J -convexes de \widetilde{M} ,*

$$\frac{\mu(M_j)}{d_g^2(x_0, \partial M_j)} \rightarrow \infty$$

Dans le cas particulier des variétés de Stein (M^{2n}, J, ψ) , pour a valeur régulière de ψ , $M_a = \{\psi \leq a\}$ est une variété à bord J -convexe et M est l'union des M_a . Si M n'est pas fortement symplectique hyperbolique (ce qui est le cas par exemple si M est sous-critique), alors $\mu(M_a) <$

¹même si on ne l'avait pas supposé, cette hypothèse implique que $\mu(M_j) < \infty$ et donc que M_j n'est pas symplectique hyperbolique ; ce n'est pas le cas de l'hypothèse précédente

∞ . On en déduit donc que $\mathcal{T}(M_a, J) \neq \emptyset$, puis que $\tau_J(M_a, \omega) = a$ (à une constante additive près).

Le théorème 4.2.1 nous dit dans ce cas que si $\mu(M_a)$ ne croît pas trop vite avec a , alors M n'est pas pseudo-Kähler-hyperbolique. De plus si l'on a un contrôle suffisant sur la croissance de $\mu(M_a)$ (i.e. si M est suffisamment non symplectique hyperbolique) la proposition 3.2.3 permet de montrer directement la non Kobayashi-hyperbolicité de M . En effet, comme précédemment, si M n'est pas fortement symplectique hyperbolique on obtient des disques $v_a : \mathbb{D} \rightarrow M_a$ d'aire $\text{aire}(v_a) \leq \mu(M_a)$ tels que $v_a(0) = x_0$ et $v_a(\partial\mathbb{D}) \subset \partial M_a$. Ainsi, $\tau(v_a) = a - \psi(x_0)$ et on obtient donc dans ce cas, grâce aux propositions 3.2.2 et 3.2.3 une autre version du théorème 4.2.1 :

Théorème 4.2.4 *Soit (M, J, ω, ψ) une variété de Stein et on note $M_a = \{\psi \leq a\}$. Si M est non (S) -symplectique hyperbolique, alors M n'est pas complexe hyperbolique. Plus précisément : si pour une suite exhaustive (a_n) $\mu(M_{a_n}) = O(a_n)$, alors M n'est pas pseudo-Kähler-hyperbolique. De plus si M est suffisamment non symplectique hyperbolique et plus précisément si $\mu(M_{a_n}) = o(a_n)$, alors M n'est pas Kobayashi-hyperbolique.*

Exemple 4.2.1 *Pour illustrer ces notations, considérons le cas de (\mathbb{R}^{2n}, J_0) , avec J_0 la structure complexe standard. La fonction $|z|^2$ vérifie $\text{dd}^c |z|^2 = 4\omega_0 > 0$. Les variétés M_{R^2} sont égales à $B^{2n}(R)$ et donc $\mu(M_{R^2}) = 4\pi R^2$. Ainsi $\mu(M_{R^2}) = O(R^2)$. On retrouve donc ainsi que \mathbb{R}^{2n} n'est pas pseudo-Kähler hyperbolique. De plus, comme on l'a expliqué dans la partie 3.1.4, dans ce cas (où le groupe de biholomorphismes isométriques est co-compact), cela est équivalent à ce que \mathbb{R}^{2n} ne soit pas Brody-hyperbolique.*

Une fois encore, on peut exprimer ce théorème dans le sens "positif" :

Corollaire 4.2.2 *Soient (M, J, ω, ψ) une variété de Stein et $M_a = \{\psi \leq a\}$. Si M est pseudo-Kähler hyperbolique, alors (M, ω) est symplectique hyperbolique :*

$$\frac{\mu(M_a)}{a} \rightarrow \infty$$

Si M est Kobayashi-hyperbolique alors il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\mu(M_a) \geq Ca$$

Dans le cas des variétés de Stein, j'ai obtenu une estimation dans la partie 2.2.4 de la capacité $\mu(M_a)$. Au vu de ces résultats, le théorème 4.2.4 se lit :

Théorème 4.2.5 *Soit (M^{2n}, J, ω) une variété de Stein complète en $-\infty$ (i.e. le champ de gradient de ψ est complet en $-\infty$) et supposons que (M, ω) n'est pas fortement symplectique hyperbolique (c'est le cas par exemple si M est sous-critique).*

S'il existe $\alpha > 0$ et un compact $K \subset M$ tel que $\frac{\|d\psi\|^2}{\psi} \geq \alpha$ sur $W \setminus K$, alors :

- (i) *si $\alpha \leq 1$, alors M n'est pas pseudo-Kähler-hyperbolique.*
- (ii) *si $\alpha < 1$, alors M n'est pas Kobayashi-hyperbolique.*

En fait en utilisant les expressions plus précises obtenues dans cette même partie 2.2.4 en utilisant les fonctions fondamentales α et β définies par la définition 2.2.4, on pourrait encore raffiner nos hypothèses.

4.2.2 Applications aux variétés $M = W \setminus H$

On considère (M, ω_0, J_0) une variété Kähler compacte. Si $\frac{1}{2\pi}[\omega_0]$ est une classe entière (*resp.* rationnelle), il existe une pré-quantisation de (M, ω_0) (*resp.* $(M, k\omega_0)$), c'est-à-dire un fibré holomorphe en droite \mathcal{L} au-dessus de M de courbure ω_0 (*resp.* $k\omega_0$, auquel cas on désignera $k\omega_0$ par ω_0 par la suite). Munissons alors \mathcal{L} d'une métrique $|\cdot|$ et d'une connection ∇ . Pour toute section holomorphe non nulle $s : M \rightarrow \mathcal{L}$, on peut considérer $H = \{s = 0\}$ et $W = M \setminus H$. La fonction $\phi = (-\log|s|^2)$ est une fonction pluri-sous-harmonique sur W et vérifie $\text{dd}^c \phi = \omega_0$. Ainsi (W, ω_0, J_0, ϕ) est une variété de Stein (non complète).

On peut alors lui appliquer les résultats de la partie précédente. Mais dans ce cas, on peut estimer $\frac{\|d\phi\|^2}{\phi}$ plus précisément. En effet, $|d\phi| = \frac{1}{|s|^2}|ds|^2$. Ainsi,

$$\frac{\|d\phi\|^2}{\phi} = \frac{|\partial|s|^2|^2}{|s|^4 |\log|s|^2|}. \quad (4.5)$$

Généralisons la notion de section transverse : on dit qu'une section s est **pseudo-transverse** à la section nulle s'il existe une constante $c > 0$ et une constante $0 \leq \alpha < 1$ telle que sur un voisinage de Σ $|d|s|^2| > c|s|^{2\alpha}$.

On obtient alors que :

Proposition 4.2.1 *Soient \mathcal{L} un fibré holomorphe au dessus de (M, ω_0, J_0) de courbure Γ , et s une section holomorphe non nulle de \mathcal{L} . On considère $\Sigma = \{s = 0\}$ définie par une section s pseudo-transverse à la section nulle, et $W = M \setminus \Sigma$. Supposons que W n'est pas fortement symplectique hyperbolique. Alors*

1. *(W, ω_0, J_0) n'est pas pseudo-Kähler hyperbolique. D'où (W, J_0) n'est pas hyperboliquement plongé dans M , et W ou Σ n'est pas Brody-hyperbolique (et donc M n'est pas hyperbolique).*
2. *(W, J_0) n'est pas Kobayashi-hyperbolique.*

Dém. : S'il existe une constante $c > 0$ et une constante $0 \leq \alpha < 1$ telle que sur un voisinage de Σ $|d|s|^2| > c|s|^{2\alpha}$, alors d'après (4.5), $\frac{\|d\phi\|^2}{\phi} \rightarrow \infty$ quand $|s| \rightarrow 0$. On peut donc appliquer le théorème 4.2.5 (puis l'équivalence entre les différentes hyperbolicités complexes puisque W est relativement compact dans M). ■

Cette étude s'applique parfaitement au cadre des polarisations, et plus particulièrement des polarisations sous-critiques (qui sont non fortement symplectique hyperboliques).

Exemple des polarisations sous-critiques

J'adopterai la définition introduite par Biran et Cielibak [4] : $\mathcal{P} = (M, \omega, J, \Sigma)$ est une polarisation de la variété Kähler (M, ω, J) si $[\omega] \in H^2(M, \mathbb{Z})$ et si Σ est une sous-variété complexe réduite, dual de Poincaré de $k[\omega]$ où $k \in \mathbb{N}^*$ est appelé le degré de la polarisation.

En considérant le fibré $\mathcal{L} = \mathcal{O}_M(\Sigma)$ associé canoniquement à Σ et une section holomorphe s de \mathcal{L} définissant Σ , on peut appliquer le raisonnement ci-dessus.

On dit que la polarisation est sous-critique si la variété de Stein $W = M \setminus \Sigma$ est une variété de Stein sous-critique. Elle est alors non fortement symplectique hyperbolique. On a alors comme corollaire de la proposition 4.2.1 ci-dessus :

Corollaire 4.2.3 *Si (M, ω, J) admet une polarisation sous-critique (M, ω, J, Σ) définie par une section s du fibré $\mathcal{O}_M(\Sigma)$ transverse, ou seulement pseudo-transverse, à la section nulle, alors M n'est pas Brody-hyperbolique. Plus précisément, $W = M \setminus \Sigma$, ou Σ n'est pas Brody-hyperbolique. De plus, W n'est pas Kobayashi-hyperbolique.*

Citons également un autre exemple important où la proposition s'applique (même s'il s'agit d'un cas défini par une section non transverse) :

Exemple de $\mathbb{P}^n \mathbb{C} \setminus \{k \text{ hyperplans}\}$

On considère la variété Kähler $M = \mathbb{P}^n \mathbb{C}$ munie de ses structures canoniques (ω, J_0) et Σ l'union de k hyperplans en position générale avec $k \leq n$, et $W = M \setminus \Sigma$. Quitte à changer le système de coordonnées de \mathbb{C}^{n+1} on peut supposer que les hyperplans sont définis par $z_j = 0$ pour $0 \leq j \leq k-1$. L'hypersurface Σ est alors définie (sur \mathbb{C}^{n+1}) par :

$$|\sigma| = \frac{\prod_{j=0}^{k-1} |z_j|}{|z|^k} = 0.$$

On définit alors $\phi = -\log(|\sigma|^2)$; elle vérifie $dd^c \phi = k\omega$. On est donc bien dans le cadre de la proposition 4.2.1. Il nous faut vérifier l'hypothèse de pseudo-transversalité.

Soit $z \in \mathbb{C}^{n+1}$ (relevé d'un élément de $\mathbb{P}^n \mathbb{C}$) tel que $|z| = 1$. En appliquant $d\phi$ à $v = (0, \dots, z_j, \dots, 0)$, on voit immédiatement que pour tout $j = 0 \dots k-1$, $|d\phi|^2 \geq 4 \frac{(1-k|z_j|^2)^2}{|z_j|^2(1-|z_j|^2)}$. Et donc, il existe une constante $c > 0$ telle que, pour tout j , sur le voisinage $V_j = \{|z_j|^2 \leq \frac{1}{2k}\}$ de l'hyperplan $\{z_j = 0\}$, on a $|d\phi|^2 \geq \frac{c}{|z_j|^2}$. Finalement, sur le voisinage de Σ , $\cup_{j=0}^{k-1} V_j$ (i.e. hors d'un sous-ensemble compact de W),

$$|d\phi|^2 \geq c \max_{j=0 \dots k-1} \frac{1}{|z_j|^2} \geq c \frac{1}{|\sigma|^{\frac{1}{k}}}.$$

Et finalement sur un voisinage de Σ

$$\frac{\|d\phi\|^2}{\phi} \geq c \frac{1}{|\sigma|^{\frac{1}{k}} |\log(|\sigma|^2)|} \rightarrow \infty$$

quand $|\sigma| \rightarrow 0$. C'est d'ailleurs équivalent vu (4.5) à $|\partial\sigma| \geq C|\sigma|^{1-\frac{1}{2k}}$.

Comme de plus on peut vérifier que pour $k \leq n$, $W = \mathbb{P}^n \mathbb{C} \setminus \{k \text{ hyperplans}\}$ est sous-critique et donc non symplectique hyperbolique, on peut appliquer la proposition 4.2.1 et on retrouve ainsi que W n'est pas complexe hyperbolique.

4.2.3 Application : hyperbolicité et courbure

Soit (M, J) une variété complexe munie d'une métrique g compatible. On sait que si la courbure sectionnelle de g est majorée par une constante strictement négative, alors (M, J) est Kobayashi hyperbolique. La question d'une réciproque partielle est toujours ouverte. Voyons comment mon étude s'intègre dans cette question.

78 CHAPITRE 4. PREMIERS LIENS ENTRE HYPERBOLICITÉ SYMPLECTIQUE ET COMPLEXE

Comme je l'ai dit en 2.2.6, en géométrie riemannienne, les variétés à bouts coniques peuvent être considérées comme le pendant des variétés convexes à l'infini (au sens symplectique ou complexe). Nous allons donc nous placer dans ce cadre.

Nous avons vu (proposition 2.2.7) que si la variété n'était pas fortement symplectique hyperbolique, alors, moins la courbure était négative, plus on avait un contrôle sur la croissance de la capacité.

On peut alors appliquer le théorème 4.2.5 et on obtient :

Proposition 4.2.2 *Soit (M, J, g) une variété hermitienne à bouts coniques. Si sa courbure radiale vérifie*

$$-k(s) \leq \text{curv}(x) \leq K(s) \text{ pour tout } x \text{ tel que } \rho(x) = s$$

où k et K sont deux fonctions positives ou nulles vérifiant $1 \geq \int sK(s) = 1 - \mu$ et $\exp(\int sk(s)) = \eta < \infty$ pour deux constantes μ et $\eta > 0$. Alors $(M, \text{dd}^c \rho^2, J)$ est une variété Kähler et les métriques g et $\text{dd}^c \rho^2$ sont équivalentes.

Si $(M, \text{dd}^c \rho^2)$ n'est pas fortement symplectique hyperbolique, et si la courbure radiale est positive ou nulle (soit $k = 0$ et $\eta = 1$), alors (M, J) n'est pas pseudo-Kähler et donc pas g -hyperbolique.

Corollaire 4.2.4 *Soit (M, J, g) une variété hermitienne à bouts. Si elle pseudo-Kähler-hyperbolique, alors sa courbure radiale n'est pas positive ou nulle (c'est-à-dire il existe x tel que $\text{curv}(x) < 0$).*

Chapitre 5

Approfondissement et application à la stabilité de la non-hyperbolicité

Comme nous l'avons rappelé à la partie 3.1.3, l'hyperbolicité complexe est une notion "ouverte" [29]. On ne peut donc pas espérer prouver en général des résultats de stabilité pour la non-hyperbolicité complexe. Toutefois, nous avons vu que (sous certaines hypothèses) la non-hyperbolicité symplectique (notion purement symplectique) impliquait la non hyperbolicité complexe des structures pseudo-complexes compatibles. Il est donc naturel de se poser la question de la stabilité de la non-hyperbolicité complexe par déformation de la structure pseudo-complexe dans l'ensemble des structures pseudo-complexes compatibles à une même structure symplectique.

Cette question n'a pour l'instant été abordée que par Bangert [3] dans le cas particulier du tore : il montre en utilisant une approche différente (qui n'utilise pas la notion d'hyperbolicité ou capacité symplectique mais les propriétés propres à \mathbb{C}^n) que le tore complexe n'est pas complexe hyperbolique pour toute structure pseudo-complexe compatible avec la structure symplectique standard.

A travers l'étude du chapitre précédent, les variétés symplectiques non symplectique-hyperbolique apparaissent comme le cadre naturel de généralisation de ce résultat. Toutefois, on n'a pour l'instant obtenu la non-hyperbolicité pseudo-complexe que pour les structures pseudo-complexes compatibles respectant l' ω -convexité, et nous aimerions obtenir ce résultat sans cette condition. Tel est l'objet du travail de ce chapitre.

J'explique que si on se restreint à des variétés satisfaisant certaines hypothèses de "géométrie bien bornée" (*i.e* si on renforce nos hypothèses sur la variété) alors on peut obtenir le résultat plus fort souhaité : si une telle variété est (suffisamment) non symplectique hyperbolique alors pour toute structure pseudo-complexe (uniformément) compatible, la variété est non pseudo-complexe-hyperbolique. Ainsi pour de telles variétés non symplectique hyperboliques, la non-hyperbolicité complexe est stable par déformation de la structure pseudo-complexe à l'intérieur de $\mathcal{J}(\omega) = \{J \text{ } g\text{-uniformément compatible avec } \omega\}$ (*i.e* l'ensemble des J pour lesquels $\omega(\cdot, J\cdot)$ est équivalente à g). Et on généralise ainsi le théorème de Bangert au cas plus général de ces variétés.

Dans tout ce chapitre, nous utiliserons les fonctions fondamentales α , β , ou α_0 et β_0 introduites par la définition 2.2.4 sans en rappeler la définition.

5.1 Résultats de stabilité

Comme la J -convexité est stable par C^1 -petites déformations de J , on peut obtenir un premier résultat comme conséquence immédiate du théorème 4.2.1 :

Proposition 5.1.1 *Soient (M, ω) une variété symplectique convexe à l'infini et J_0 une structure pseudo-complexe telle que M s'écrive comme l'union d'ouverts relativement compacts M_j J_0 -convexes (on sait d'après la proposition 1.2.1 qu'une telle structure existe). On note $|\cdot|$ la norme et d la distance associées à $g_0 = \omega(\cdot, J_0 \cdot)$.*

Si (M, ω) n'est pas g_0 -symplectique hyperbolique, alors (M, ω, J_0) n'est pas pseudo-Kähler hyperbolique. De plus cette propriété est stable par déformation C^1 de la structure pseudo-complexe. Plus précisément si $g = \omega(\cdot, J \cdot)$ et g_0 sont des métriques équivalentes (condition C^0) et si les M_j sont J -convexes (ce qui est le cas si J est suffisamment C^1 -proche de J_0 , plus précisément s'il existe $\alpha < 1$ tel que $|\mathrm{dd}_{J-J_0}^c \phi| < \alpha \inf_{v \in \zeta_x, |v|=1} \mathrm{dd}_{J_0}^c \phi(v, Jv)$, où ϕ définit $\partial M_J = \{\phi = a_j\}$), alors (M, ω, J) n'est pas pseudo-Kähler.

Dém. : La non pseudo-Kähler hyperbolicité de (M, ω, J_0) est le résultat du théorème 4.2.1. De plus, les hypersurfaces ∂M_j sont définies par $\{\phi = a_j\}$ pour ϕ une fonction sur M et a_j des constantes. Leur J_0 -convexité se lit comme la stricte positivité de $\mathrm{dd}_{J_0}^c \phi$ sur les hyperplans complexes ζ de $T\partial M_j$. S'il existe $\alpha < 1$ tel que $|\mathrm{dd}_{J-J_0}^c \phi| < \alpha \inf_{v \in \zeta_x, |v|=1} \mathrm{dd}_{J_0}^c \phi(v, Jv)$ (ce qui est une condition C^1), alors $\mathrm{dd}_J^c(v, Jv) = \mathrm{dd}_{J_0}^c \phi(v, Jv) + \mathrm{dd}_{J-J_0}^c \phi(v, Jv) \geq \mathrm{dd}_{J_0}^c \phi(v, Jv) - \alpha \inf_{v \in \zeta_x, |v|=1} \mathrm{dd}_{J_0}^c \phi(v, Jv)|v|^2$. Or si J est suffisamment proche de J_0 , les hyperplans complexes de J sont proches des hyperplans zeta et il existe $\alpha' < \alpha'' < 1$ tel que sur ces hyperplans $\mathrm{dd}_{J_0}^c \phi(v, Jv) \geq \alpha'' \inf_{v \in \zeta_x, |v|=1} \mathrm{dd}_{J_0}^c \phi(v, Jv)|v|^2$. Et on constate donc que les hypersurfaces ∂M_j sont J -convexes. De plus s'il existe $\alpha' < 1$ tel que $|J - J_0| < \alpha'$ alors les métriques g et g_0 sont équivalentes et alors : $\mu(M_j) = O(d(x_0, M_j)^2) = O(d_g(x_0, M_j)^2)$. Ainsi on peut appliquer le théorème 4.2.1 à (M, ω, J) et on démontre ainsi le théorème. ■

Toutefois la contrainte C^1 que l'on impose à J dans cette proposition est plutôt forte. On aimerait pouvoir l'assouplir (en n'exigeant plus la J -convexité des hypersurfaces). Pour cela nous allons développer un type de raisonnement et de construction général (qui sera expliqué dans les prochaines sections) qui va me permettre de montrer les théorèmes de la section suivante.

5.1.1 Théorèmes principaux

Ces théorèmes vont généraliser le résultat de Bangert à une classe particulière de variétés vérifiant des hypothèses de géométrie bornée. En effet, comme l'ensemble des structures pseudo-complexes compatibles à une structure symplectique fixée est contractile, l'idée est d'utiliser cette propriété pour déformer la structure pseudo-complexe fixée en de nouvelles structures pseudo-complexes qui préservent l' ω -convexité à l'infini. On obtient alors une famille de disques pseudo-holomorphes pour ces nouvelles structures. Et on a ainsi besoin de couper ces courbes pour obtenir une courbe pseudo-holomorphe pour la structure pseudo-complexe initiale.

Comme les hypothèses requises (assez techniques) vont se retrouver de nombreuses fois dans les résultats (et leurs applications) qui vont suivre, je les introduis des maintenant (afin de ne pas avoir à les réécrire à chaque fois).

Définition 5.1.1 On dira qu'une variété de Stein (M, ω, J, ψ) est

1. à Hessien bien minoré s'il existe $A > 0$ telle que $\forall v \in \{d\psi = 0\}$ $\text{Hess } \psi(v, v) \geq A \frac{|\nabla \psi|^2}{\psi} |v|^2$
2. à Hessien fortement minoré s'il existe $A > 0$ telle que $\forall v \in TM$, $\text{Hess } \psi(v, v) \geq A \frac{|\nabla \psi|^2}{\psi} |v|^2$
3. à différentielle δ -majorée (où $\delta \geq 0$) si la fonction canonique β (définie comme $\sup_{x, \sqrt{\psi}=s} \frac{|\nabla \psi|^2}{\psi}$) est majorée : βs^δ (i.e. s'il existe $c > 0$ tel que $\beta(s) \leq cs^\delta$).

On dira qu'une variété Kähler à bouts coniques (M, g, J) est :

1. à courbure radiale bien majorée
 - s'il existe une fonction $K \geq 0$ telle que la courbure radiale sur $\{\rho = s\}$ soit majorée par $\text{curv} \leq K(s)$, et $\int sK(s) < 1$
 - ou bien si $\text{Hess } \rho \geq \frac{\mu}{\rho} H$ avec $H = g_0 - d\rho \otimes d\rho$ (c'est-à-dire si $\text{Hess } \rho \geq \frac{\mu}{\rho} g_0$ sur TS où le bout s'écrit $S \times [1, \infty[$),
2. à courbure radiale bien minorée s'il existe une fonction $k \geq 0$ telle que la courbure radiale sur $\{\rho = s\}$ soit minorée par $\text{curv} \geq -k(s)$, et $\int sk(s) < \infty$
3. à courbure radiale bien bornée si elle est à la fois à courbure radiale bien majorée et bien minorée.

On dira qu'une variété de Stein (M, ω, J, ψ) est

1. à géométrie I_δ -bornée si elle est à Hessien bien minoré et à différentielle δ -majorée
2. à géométrie II_δ -bornée si elle est à courbure radiale bien majorée et à différentielle δ -majorée
3. à géométrie I_δ fortement bornée si elle est à Hessien fortement minoré et à différentielle δ -majorée.

Ce sont à des variétés de ce type-là que vont s'appliquer nos résultats. \mathbb{C}^n vérifie bien-sûr ces différentes hypothèses (avec $\delta = 0$).

A propos de l'hypothèse de courbure radiale bien majorée rappelons que la majoration par une telle fonction K implique la minoration de $\text{Hess } \rho$. Toutefois dans nos applications seule la minoration de $\text{Hess } \rho$ sera nécessaire. Voilà pourquoi nous avons choisi d'inclure cette hypothèse sous le terme de courbure radiale bien majorée.

Citons nos théorèmes principaux pour les variétés de Stein. Le premier fait directement intervenir les hypothèses isopérimétriques nécessaires pour couper les courbes pseudo-holomorphes :

Théorème 5.1.1 Soit (M, ω, ψ, J_0) une variété de Stein non fortement symplectique hyperbolique. Si elle vérifie l'une des propriétés isopérimétriques suivantes :

1. Pour $Q > 1$ il existe une constante $C = C_Q > 0$ telle que si une surface Q -minimisante S vérifie $\partial S \subset B(x_0, C\sqrt{\mu(M_{a+1})})$ et $\text{aire}(S) \leq \mu(M_{a+1})$ alors $S \subset M_a$.
2. Pour $Q > 1$ il existe une constante $C > 0$ telle que si S est une surface Q -minimisante avec $\partial S \subset M_{C_a}$ et $\text{aire}(S) \leq \mu(M_{a+1})$ alors $S \subset M_a$. De plus, M vérifie l'hypothèse de non-hyperbolicité symplectique :

$$\mu(M_{a+1}) = O\left(\frac{a}{\beta(a)}\right) \quad (5.1)$$

Alors, pour tout J uniformément compatible avec ω , (M, ω, J) est non pseudo-Kähler hyperbolique. Ainsi si (M, ω) admet un quotient compact (W, ω_0) , alors pour tout J compatible avec ω_0 , (M, J) n'est pas Brody-hyperbolique.

Or ces hypothèses sont en particulier vérifiées si la variété M est à géométrie bien bornée. Ainsi,

Théorème 5.1.2 Soit (M, ω, ψ, J_0) une variété de Stein non fortement symplectique hyperbolique. Si elle vérifie l'une des propriétés suivantes :

1. M est une variété à géométrie II_δ -bornée. Et elle vérifie l'hypothèse de non-hyperbolicité symplectique :

$$\mu(M_a) \leq a^{(1-\delta)\frac{m}{2}}, \quad (5.2)$$

avec m une valeur isopérimétrique de M .

2. M est à géométrie I_δ bornée. Et de plus M vérifie l'hypothèse de non-hyperbolicité symplectique :

$$\mu(M_a) = O\left(a^{\min(1-\delta, (1+\delta)\frac{m}{2})}\right)$$

Alors, pour tout J uniformément compatible avec ω , (M, ω, J) est non pseudo-Kähler hyperbolique. Ainsi si (M, ω) admet un quotient compact (W, ω_0) , alors pour tout J compatible avec ω_0 , (M, J) n'est pas Brody-hyperbolique.

Si on diminue légèrement notre hypothèse sur la non symplectique hyperbolicité, on ne peut plus prouver la non-hyperbolicité complexe pour toute structure pseudo-complexe compatible. Toutefois, on peut prouver la non-hyperbolicité complexe pour toute structure pseudo-complexe dans un voisinage ouvert de la structure pseudo-complexe standard :

Théorème 5.1.3 Soit (M, ω, ψ, J_0) une variété de Stein non fortement symplectique hyperbolique. Si elle vérifie l'une des propriétés suivantes :

1. Pour $Q > 1$, il existe constante $C > 0$ telle que si S est une surface Q -minimisante avec $\partial S \subset M_{C_a}$ et $\text{aire}(S) \leq \mu(M_{a+1})$ alors $S \subset M_a$. De plus M est non (S) -symplectique hyperbolique.
2. M est à géométrie I_δ -bornée. De plus M est suffisamment non symplectique hyperbolique :

$$\mu(M_a) = O\left(a^{\min(1, (1+\delta)\frac{m}{2})}\right)$$

Alors (M, ω, J_0) est non pseudo-Kähler hyperbolique et cela reste le cas sur un voisinage C^1 de J_0 : pour tout J compatible avec ω vérifiant pour un $C > 0$ $|\text{dd}_J^c \psi| < C$, (M, ω, J) est non pseudo-Kähler hyperbolique.

Notons que la condition requise pour J est nettement moins forte que celle de la proposition de la section précédente ; ainsi l'ouvert de structures pseudo-complexes non-complexe-hyperboliques est nettement plus grand.

Dans ces trois théorèmes m désigne une valeur isopérimétrique de M , c'est-à-dire que, par définition, il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute courbe l fermée, contractile, dans M , il existe une surface S telle que $\partial S = l$ et $\text{aire}(S)^{1-\frac{1}{m}} \leq C \text{longueur}(l)$.

Remarque 5.1.1 Dans les hypothèses j'écris la non-hyperbolicité symplectique comme $\mu(M_a) = O(a^\nu)$ mais, comme cela apparaîtra dans la preuve, il suffit en fait de supposer qu'il existe une sous-suite a_n telle que $\mu(M_{a_n}) = O(a_n^\nu)$ (ce qui est la véritable traduction de la non-hyperbolicité symplectique). Mais j'ai préféré ne pas le préciser dans les énoncés afin de ne pas les alourdir davantage. Dans tout ce chapitre, j'utiliserai la même simplification (pour $\mu(M_a)$ mais aussi pour $\mu(B^{2n}(a))$ de l'écriture de la non-hyperbolicité symplectique).

Avant de prouver ce théorème je rappellerai les définitions des notions isopérimétriques apparaissant dans ces théorèmes et établirai plusieurs résultats isopérimétriques nécessaires pour leur preuve. Ils impliqueront notamment :

Lemme 5.1.1 1. l'hypothèse 2. implique l'hypothèse 1 dans le théorème 5.1.3.

2. l'hypothèse 1. (resp. 2) du théorème 5.1.2 implique l'hypothèse 1 (resp. 2) of theorem 5.1.1.

Ainsi afin de démontrer ces trois théorèmes, il suffit de prouver le théorème 5.1.1 et de montrer que l'hypothèse 1 implique la conclusion du théorème 5.1.3.

Comme nous l'avons d'ores et déjà vu dans la partie 2.2.6 ou 4.2.3, notre approche s'applique également particulièrement bien aux variétés à bouts à courbure radiale bien bornée (qui dans l'approche Riemannienne constituent le pendant des variétés de Stein). On a dans ce cadre un résultat similaire :

Théorème 5.1.4 Soit (M, J_0, g_0) une variété Kähler à bouts dont la courbure radiale est bien bornée. Si de surcroît une des hypothèses suivantes est vérifiée :

1. $(M, dd^c \rho^2)$ est suffisamment non symplectique hyperbolique et plus précisément : $\mu(B(a), dd^c \rho^2) = O(a^m)$, où m est une valeur isopérimétrique de M (i.e. exactement dans le cas où $m = 2$: M est non symplectique hyperbolique, aux sens à la fois g_0 et S).
2. la courbure radiale de M est positive ou nulle et $m = 2$

Alors pour toute structure pseudo-complexe J uniformément compatible avec $dd^c \rho^2$, (M, J) est non pseudo-Kähler hyperbolique.

Dans ce cas il est évident (partie 2.2.6) que l'hypothèse 2. implique l'hypothèse 1.

Qui plus est notons que dans le cas particulier d'une variété à poles, c'est-à-dire possédant un point x_0 tel que \exp_{x_0} soit un difféomorphisme, sous les hypothèses du théorème ci-dessus, \exp_{x_0} est une quasi-isométrie et nécessairement $m = 2$.

Ces résultats seront démontrés dans la section 5.2.2. (La preuve du théorème 5.1.4 apparaîtra comme une version simple de la démonstration du théorème 5.1.1).

Mais commençons par énoncer certains corollaires intéressants de ces théorèmes (que je prouverai section 5.3.2).

5.1.2 Applications et exemples

Notons dans un premier temps que, en appliquant ces théorèmes à \mathbb{C}^n muni de sa structure symplectique standard et d'une structure pseudo-complexe compatible, toutes deux relevées d'une structure du tore, nous retrouvons le résultat de Bangert :

Théorème 5.1.5 ([3]) Pour toute structure pseudo-complexe J sur \mathbb{R}^{2n} uniformément compatible avec la structure symplectique standard de \mathbb{R}^{2n} , (\mathbb{R}^{2n}, J) est non pseudo-Kähler-hyperbolique. Et donc, si $(\mathbb{T}^{2n}, \omega)$ est un tore standard (i.e. quotient de \mathbb{R}^{2n} muni de sa structure symplectique

standard). Alors, pour toute structure pseudo-complexe J compatible avec ω , (\mathbb{T}^{2n}, J) est non Brody hyperbolique.

Il est naturel de tenter de généraliser ce résultat obtenu pour $\mathbb{C}^n = \mathbb{CP}^n \setminus \mathbb{CP}^{n-1}$ au cas plus général des variétés $W = M \setminus H$. Conservons les notations introduites dans la section 4.2.2. Si $H = \{s = 0\}$, en notant $\phi = (-\log|s|^2)$ et $\omega_0 = dd^c\phi$, $\psi = \exp(\phi)$ et $\omega = dd^c\psi$, on a ainsi deux variétés de Stein : (W, ω_0, J_0, ϕ) (non complète) et (W, ω, J_0, ψ) .

Le théorème 5.1.2 permet dans ce cas-là de montrer pour $(W, \omega, J_0, \psi, |\cdot|)$:

Corollaire 5.1.1 *Supposons que (W, ω) n'est pas fortement symplectique hyperbolique (par exemple si W est une variété de Stein sous-critique) et que la section s définissant H est pseudo-transverse. Alors nous avons vu que (W, ω, J_0) n'était pas pseudo-Kähler hyperbolique.*

Si de plus, (W, ω, ψ, J_0) est à Hessien bien minoré ou à courbure radiale bien majorée alors cette propriété est stable : pour toute structure pseudo-complexe J uniformément compatible avec ω , (W, ω, J) n'est pas pseudo-Kähler.

En particulier, si (W, ω, J_0) admet un quotient compact \widetilde{W} , alors (\widetilde{W}, J) et (W, J) ne sont pas Brody-hyperboliques pour toute structure pseudo-complexe J compatible avec ω sur \widetilde{W} .

On peut de plus compléter et raffiner ce résultat en considérant parallèlement (W, ω_0, \cdot) :

Corollaire 5.1.2 *Supposons que (W, ω) n'est pas fortement symplectique hyperbolique et que la section s définissant H est pseudo-transverse,*

1. *si (W, ω, J) est à courbure radiale bien majorée, alors pour toute structure pseudo-complexe J uniformément compatible avec ω et ω_0 , (W, J) n'est pas hyperboliquement plongé dans M ,*
2. *si (W, ω, J, ψ) est à Hessien bien minoré, alors pour toute structure pseudo-complexe J uniformément compatible avec ω et ω_0 et vérifiant $|dd^c_J \phi|_0 \leq A$ pour A une constante $(e\ell, \cdot)_0$ la norme pour $\omega_0(\cdot, J_0 \cdot)$, (W, J) n'est pas Kobayashi hyperbolique.*

Si de plus J se prolonge en une structure pseudo-complexe sur M entier alors soit W , soit H n'est pas Brody-hyperbolique.

Notons que la condition $|dd^c_J \phi|_0 \leq A$ sera en particulier vérifiée pour tout J suffisamment proche de J_0 puisque $|dd^c J_0| = 1$.

L'étude du Hessien dans des cas particuliers où celui-ci est calculable de façon directe me permet de trouver des exemples concrets :

Corollaire 5.1.3 *Soit $W = \mathbb{CP}^n \setminus \{k \text{ hyperplans}\}$ pour $k \leq n$ munie de sa structure complexe canonique J_0 . Alors pour toute structure pseudo-complexe dans un voisinage C^1 de J_0 , (W, J) n'est pas complexe hyperbolique.*

En fait plus généralement, je montre :

Proposition 5.1.2 *Soit $W = \mathbb{P}^n \mathbb{C} \setminus \Sigma$ où Σ est une hypersurface définie par $\{P = 0\}$ avec P un polynôme homogène de degré k sur \mathbb{C}^{n+1} .*

Il existe une constante ϵ telle que, s'il existe $\alpha < 1$ tel que pour tout $z \in \mathbb{S}^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$, pour tout $v \in \mathbb{C}^{n+1}$ avec $\langle v, z \rangle_{\mathbb{C}} = 0$ et $\partial P(v) = 0$,

$$\left| \frac{1}{P} \sum_{i,j=0}^n \frac{\partial^2 P}{\partial z_i \partial z_j} v_i v_j \right| \leq \alpha \frac{1}{|P|^2} \sum_{j=0}^n \left| \frac{\partial P}{\partial z_j} \right|^2 |v|_{euc}^2, \quad (5.3)$$

et si sur \mathbb{S}^{2n+1}

$$\frac{1}{|P|} \left(\sum_{i,j} \left| \frac{\partial^2 P}{\partial z_i \partial z_j} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \epsilon_n \left(\left(\frac{1}{|P|^2} \sum_{j=0}^n \left| \frac{\partial P}{\partial z_j} \right|^2 \right)^2 \right), \quad (5.4)$$

alors avec la fonction pluri-sous-harmonique canonique sur W , $\psi = \frac{|z|^{2k}}{|P|^2}$ (pour laquelle si $\phi = \ln \psi$, $\mathrm{dd}^c \phi = k\bar{\omega}$) $(W, J_0, k\bar{\omega}, \psi)$ est à Hessien bien minoré.

Et donc :

Corollaire 5.1.4 Soit $W = \mathbb{P}^n \mathbb{C} \setminus \Sigma$ où Σ est une hypersurface définie par $\{P = 0\}$ avec P un polynôme homogène de degré k sur \mathbb{C}^{n+1} . Si Σ est une section transverse, c'est-à-dire si P est un polynôme irréductible, (ou si Σ est seulement une section pseudo-transverse), et si W est non symplectiquement hyperbolique (en particulier si W est sous-critique), alors nous avons vu (proposition 4.2.1) que (W, J_0) n'était pas complexe hyperbolique (pour J_0 la structure complexe standard). Si de plus, le polynôme P vérifie les hypothèses de la proposition ci-dessus alors cela est encore le cas pour toute structure pseudo-complexe dans un voisinage C^1 de J_0 .

Les résultats de la partie 2.2.7 suggèrent d'appliquer les théorèmes 5.1.2 et 5.1.4 aux variétés-produits et aux variétés-fibrés afin d'obtenir de nouveaux exemples de variétés où la non-hyperbolicité complexe est stable.

5.1.3 Variétés-produit

Une fois encore, je vais énoncer plusieurs résultats selon que l'on adopte le point de vue des variétés à bouts ou celui des variétés de Stein. Ces résultats ne seront parfois pas exactement des corollaires des théorèmes 5.1.2 et 5.1.4 mais se montreront avec les mêmes idées et la même méthode comme nous l'expliquerons dans la partie 5.3.4.

Tout d'abord dans le cadre de variétés à bouts :

Théorème 5.1.6 Soit (M, g_M, J_M) une variété à bouts à courbure radiale bien bornée et dont une valeur isopérimétrique $m = 2$. Supposons que $(M, \mathrm{dd}^c \rho^2)$ est non symplectique hyperbolique i.e. $\mu(B(a), \mathrm{dd}^c \rho^2) = O(a^2)$.

Alors pour toute structure pseudo-complexe uniformément compatible avec $\mathrm{dd}^c \rho_M^2$, M n'est pas pseudo-Kähler hyperbolique. Mais cela est également le cas pour les produits de M avec une autre variété :

Soit (N, g_N, ω_N, J_N) une variété pseudo-Kähler à bouts à courbure radiale bien majorée et dont une valeur isopérimétrique $m \geq 2$. Considérons la variété-produit $M \times N$, munie de la structure symplectique $\omega = \mathrm{dd}^c \rho_M^2 \otimes \omega_N$ et de la métrique riemannienne $g = g_M \oplus g_N$ et supposons que soit M soit N ait une courbure radiale négative ou nulle. Alors pour toute structure pseudo-complexe J (non nécessairement produit) uniformément compatible avec ω pour la métrique g , la variété produit $(M \times N, J)$ est non pseudo-Kähler hyperbolique.

En particulier, pour tout quotient compact, M_0 de $(M, J_M, \mathrm{dd}^c \rho_M^2)$, et N_0 de (N, ω_N, J_N) , pour toute structure pseudo-complexe compatible avec $\mathrm{dd}^c \rho_M^2 \otimes \omega_N$ sur $M_0 \times N_0$, les variétés pseudo-complexes $(M_0 \times N_0, J)$ et $(M \times N, J)$ ne sont pas Brody-hyperboliques.

Et donc évidemment :

Corollaire 5.1.5 Soit (N, g_N, ω_N, J_N) une variété pseudo-Kähler à bouts à courbure radiale bien majorée et dont une valeur isopérimétrique $m \geq 2$. Alors si l'on considère la variété-produit $\mathbb{C}^n \times N$, munie de la structure symplectique $\omega = \omega_0 \otimes \omega_N$ et de la métrique riemannienne $g = g_0 \oplus g_N$, pour toute structure pseudo-complexe J sur $\mathbb{C}^n \times N$ uniformément compatible avec ω pour la métrique g , la variété produit $(\mathbb{C}^n \times N, J)$ est non pseudo-Kähler hyperbolique.

En particulier, pour tous quotients compacts N_0 de (N, ω_N, J_N) , pour toute structure pseudo-complexe compatible avec $\omega_0 \otimes \omega_N$ sur $\mathbb{T}^{2n} \times N_0$, $(\mathbb{T}^{2n} \times N_0, J)$ et $(\mathbb{C}^n \times N, J)$ ne sont pas Brody-hyperboliques.

Dans les cas où $\mathrm{dd}^c \rho^2$ n'est pas nécessairement une structure hyperbolique, on peut adopter un point de vue légèrement différent en considérant des variétés de Stein (tout en conservant le critère de courbure) :

Théorème 5.1.7 Soient $(M, \omega_M, J_M, \psi_M)$ une variété de Stein à géométrie II_δ -bornée.

Si (M, ω_M) est suffisamment non symplectique hyperbolique : $\mu(M_a, \omega_M) = O\left(a^{(1-\delta)\frac{m_M}{2}}\right)$. Alors pour toute structure pseudo-complexe J uniformément compatible avec ω_M , (M, J) est non pseudo-Kähler hyperbolique. Mais en fait cette propriété est stable par produit avec variété à géométrie II_δ -bornée :

Soit $(N, \omega_N, J_N, \psi_N)$ une variété de Stein à géométrie II_δ -bornée (pour le même δ que M) et dont une valeur isopérimétrique $m_N \geq m_M$. Alors si M ou N est à courbure radiale négative ou nulle, pour toute structure pseudo-complexe J sur $M \times N$ uniformément compatible avec $\omega = \omega_M \oplus \omega_N$ pour la métrique $g = g_M \oplus g_N$, la variété pseudo-complexe $(M \times N, J)$ est non pseudo-Kähler hyperbolique.

En particulier, pour tous quotients M_0 de (M, ω_M, J_M) et N_0 de (N, ω_N, J_N) , pour toute structure pseudo-complexe J compatible avec $\omega = \omega_M \oplus \omega_N$ sur $M_0 \times N_0$, les variétés pseudo-complexes $(M_0 \times N_0, J)$ et $(M \times N, J)$ ne sont pas Brody-hyperboliques.

Corollaire 5.1.6 Soit $(N, \omega_N, J_N, \psi_N)$ une variété de Stein géométrie II_δ -bornée et dont une valeur isopérimétrique $m_N \geq 2$.

Alors si l'on considère la variété-produit $\mathbb{C}^n \times N$, munie de la structure symplectique $\omega = \omega_0 \otimes \omega_N$ et de la métrique riemannienne $g = g_0 \oplus g_N$, pour toute structure pseudo-complexe J (non nécessairement produit) uniformément compatible avec ω pour la métrique g , la variété produit $(\mathbb{C}^n \times N, J)$ est non pseudo-Kähler hyperbolique.

En particulier, pour tout quotient compact N_0 de (N, ω_N, J_N) , pour toute structure pseudo-complexe compatible avec $\omega_0 \otimes \omega_N$ sur $\mathbb{T}^{2n} \times N_0$, $(\mathbb{T}^{2n} \times N_0, J)$ et $(\mathbb{C}^n \times N, J)$ ne sont pas Brody-hyperboliques.

Les deux corollaires énoncés dans cette partie impliquent en particulier (mais cela s'applique également à une classe plus large de variétés) :

Corollaire 5.1.7 Soit N une variété hyperbolique compacte, i.e quotient de la variété hyperbolique $(\mathbb{D}^{2n}, \omega_{\mathrm{hyp}})$ (ou encore notée \mathbb{H}^n) par un groupe d'isométries cocompact. Alors pour toute structure pseudo-complexe J compatible avec $\omega_0 \oplus \omega_{\mathrm{hyp}}$, la variété $(\mathbb{T}^{2n} \times N, J)$ est non Brody-hyperbolique : il existe $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{T}^{2n} \times N$, J -holomorphe non constante.

En effet, une isométrie holomorphe préservant la métrique et la structure complexe préserve aussi la structure symplectique. De plus, les variétés hyperboliques \mathbb{D}^{2n} ont une courbure radiale négative (et donc a fortiori $K(s) = 0$), leur dimension isopérimétrique $m = \infty$ (a fortiori ≥ 2) et la fonction $\beta(s) \rightarrow 0$ quand $s \rightarrow \infty$ (et donc a fortiori est bornée). On peut donc même directement lui appliquer les théorèmes 5.1.6 et 5.1.7.

Plus généralement, pour toute variété non-hyperbolique M vérifiant les hypothèses du théorème 5.1.2 ou 5.1.4, non seulement (M, J) est non-hyperbolique pour toute structure pseudo-complexe uniformément compatible, mais de plus, cela est également vrai pour les produits $M \times \mathbb{D}^{2n}$. En effet, on peut appliquer les théorèmes 5.1.6 et 5.1.7 pour $N = \mathbb{D}^{2n}$ le disque hyperbolique. Ainsi,

Proposition 5.1.3 *Si M est à courbure radiale bien bornée (resp. à géométrie II_δ -bornée) et si elle est non symplectique hyperbolique (resp. suffisamment symplectique hyperbolique : $\mu(M_a, \omega_M) = O(a^{(1-\delta)\frac{m_M}{2}})$ avec m une valeur isopérimétrique de M), et si M_0 en est un quotient compact, M_0 est non Brody-hyperbolique pour toute structure pseudo-complexe compatible avec la structure symplectique. De plus, pour toute variété hyperbolique compacte H_0 , quotient de \mathbb{D}^{2n} par un groupe d'isométries holomorphes (en particulier les surfaces de genre ≥ 2), pour toute structure pseudo-complexe J compatible avec la structure symplectique produit sur $M_0 \times H_0$, $(M_0 \times H_0, J)$ est non Brody-hyperbolique.*

On pourrait également adopter un point de vue qui ne ferait pas intervenir la courbure mais uniquement des hypothèses sur la fonction psh et plus particulièrement sur son Hessien, même si, comme nous l'avons déjà souligné cette hypothèse est souvent assez difficile à vérifier en pratique :

Proposition 5.1.4 *Soit $(M, \omega_M, J_M, \psi_M)$ une variété de Stein à géométrie I_δ fortement bornée. Alors si (M, ω_M) est suffisamment non symplectique hyperbolique, plus précisément si $\mu(M_a) = O(a^{\min(1-\delta, (1+\delta)\frac{m}{2}}))$, alors, (M, J) est non pseudo-Kähler pour toute symplectique pseudo-complexe uniformément compatible avec ω_M . Mais on vérifie de plus que cela est également valable pour les produits de M avec une variété à géométrie I_δ fortement bornée :*

Si $(N, \omega_N, J_N, \psi_N)$ est une variété de Stein à géométrie I_δ fortement bornée (pour le même δ que M), alors pour toute structure pseudo-complexe J sur $M \times N$ uniformément compatible avec $\omega_M \otimes \omega_N$ $(M \times N, J)$ est non pseudo-Kähler hyperbolique. En particulier, si J est le relevé d'une structure pseudo-complexe sur un quotient compact de $M \times N$, $(M \times N, J)$ est non Brody-hyperbolique.

Rappelons maintenant les notions de calculs variationnels que nous allons utiliser pour prouver ces résultats. Nous allons également prouver un certain de nouveaux résultats (généralisations de ceux déjà connus pour \mathbb{R}^{2n}) dont nous allons avoir besoin.

5.2 Outils de calcul variationnel

5.2.1 Rappels des notions et définitions

Rappelons tout d'abord la définition d'une valeur isopérimétrique et de la **2-dimension isopérimétrique** [23] d'une variété riemannienne (M, g) : si m est une valeur isopérimétrique de M alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute courbe l fermée, contractile, dans M , il existe une surface S telle que $\partial S = l$ et $\text{aire}(S)^{1-\frac{1}{m}} \leq C \text{longueur}(l)$. De plus la dimension isopérimétrique est définie comme étant le plus grand nombre vérifiant cette propriété.

On sait [23] que si $m > 2$ alors la variété est Brody-hyperbolique. Aussi par la suite, quand nous étudierons la non-hyperbolicité, nous nous restreindrons au cas où $m \leq 2$.

Il découle immédiatement des définitions que la dimension isopérimétrique d'un produit $M \times N$ est égale au minimum des dimensions isopérimétriques de M et de N .

Introduisons maintenant une autre notion : dans une variété riemannienne, la notion de 2-courants rectifiables généralise la notion de surface de dimension 2 : un **2-courant rectifiable**

S est une application linéaire continue de l'ensemble des k -formes C^∞ à support compact dans \mathbb{R} (on définit de même les k -courants). Ainsi, si S est une surface, on peut la voir comme un courant $[[S]]$ qui, à une 2-forme π , associe $[[S]](\pi) = \int_S \pi$.

On définit alors la masse (*resp.* le bord) d'un courant qui coïncide, dans le cas classique des surfaces avec l'aire (*resp.* le bord) de la surface. Citons leurs définitions précises (ainsi que celles d'autres notions relatives aux courants).

- Si S est un courant de M et $f : M \rightarrow N$ est une fonction lipschitzienne propre, $f_\#(S)$ est le poussé en avant de S par f ; si π est une 2-forme et que f est différentiable sur N , $f_\#(S)(\pi) = S(f^*\pi)$.
- Si S est un courant de (M, g) , alors on appelle masse de S

$$\mathbf{M}(S) = \sup_{\|\pi\| \leq 1} S(\pi).$$

Dans le cas où S est une surface $\mathbf{M}([S]) = \text{aire}_g(S)$.

- Le support $\text{spt}(S)$ d'un courant a pour complémentaire le plus grand ouvert U vérifiant : si π est une 2-forme à support dans U alors $S(\pi) = 0$. Dans le cas d'un courant de $[[S]]$ avec S surface lisse de M , alors $\text{spt}([S]) = S$.
- Le bord d'un 2-courant S est un 1-courant (une application linéaire sur les 1-formes) défini par $\partial S(\alpha) = S(d\alpha)$, pour α une 1-forme à support compact. Dans le cas d'une surface S , $\partial[[S]] = [[\partial S]]$, par la formule de Stokes.
- Si S est un courant et B un borélien de M , alors le courant $S \llcorner B$ est la restriction de S à B (dans le cas d'une surface, cela correspond à l'intersection).

Cela nous permet de définir la notion de quasiminimalité ou Q -minimalité :

Définition 5.2.1 Soient (M, g) une variété riemannienne et $Q \geq 1$. Un courant S de M est **quasi-minimisant** de constante Q (ou **Q -minimisant**), si $\mathbf{M}(S \llcorner B) \leq Q \mathbf{M}(X)$ pour tout borélien B de M et tout courant rectifiable X tel que $\partial(X) = \partial(S \llcorner B)$.

Dans le cas où $Q = 1$, ceci est une généralisation des surfaces minimales.

Comme les courants que nous considérerons seront la plupart du temps de simples surfaces, nous utiliserons dorénavant les termes de surfaces, aires plutôt que celles de courants, masses... Pour plus de précisions et de résultats on pourra consulter [12] (ou [33]).

Cette notion de Q -minimalité interviendra de manière essentielle dans notre étude étant donné le résultat fondamental sur les courbes pseudo-holomorphes :

Lemme 5.2.1 Soient (M, g) une variété riemannienne, J une structure pseudo-complexe et ω une structure symplectique exacte sur M . On suppose que :

- (i) J est g -uniformément compatible avec ω (de constantes $\alpha^2 > 0$ et $C > 0$), i.e. $\omega(v, Jv) \geq \alpha^2 |v|^2 \forall v$ et $|Jv| \leq C|v| \forall v$
- (ii) ω est g -borné (de constante $\beta^2 > 0$), i.e. $\omega(u, v) \leq \beta^2 |u| |v| \forall u, v$.

Si $f : (S, i) \rightarrow (M, J)$ est pseudo-holomorphe, avec S surface riemannienne compacte à bord, alors le courant $f_\#([S])$ est Q -minimisant pour $Q = \frac{\beta^2}{\alpha^2} C$.

Dém. : En effet, si B est un borélien de M et X un courant tel que $\partial X = \partial(f_\#([S]) \llcorner B)$, alors, comme par hypothèse $\|\omega\| \leq \beta^2$, on a $X(\omega) \leq \beta^2 \mathbf{M}(X)$.

Or, si $\omega = \partial\mu$, alors

$$\mathbf{M}(X) \leq X(\omega) = \partial X(\mu) = \partial(f_\#([S]) \llcorner B)(\mu) = (f_\#([S]) \llcorner B)(\omega).$$

Il suffit donc de montrer que $(f_{\sharp}([S]) \lrcorner B)(\omega) \geq \frac{\alpha^2}{C} M(f_{\sharp}([S]) \lrcorner B)$.

Or, si ν est une 2-forme telle que $\|\nu\| \leq 1$, alors pour tout $v \in TS$, on a :

$$\begin{aligned} \omega(f_*(v), f_*(iv)) &= \omega(f_*(v), Jf_*(v)) \geq \alpha^2 |f_*(v)|^2 \\ &\geq \frac{\alpha^2}{C} |f_*(v)| |Jf_*(v)| = \frac{\alpha^2}{C} |f_*(v)| |f_*(iv)| \\ &\geq \frac{\alpha^2}{C} \nu(f_*(v), f_*(iv)). \end{aligned}$$

On a donc

$$\int_{f^{-1}(B)} f^* \omega \geq \int_{f^{-1}(B)} f^* \alpha.$$

Ce qui termine la démonstration. ■

Notons que si l'on considère la métrique Riemanienne $g = \omega(\cdot, J\cdot)$, on retrouve alors que toute courbe J -holomorphe est 1-minimisante, c'est-à-dire minimisante pour cette métrique. Toutefois, comme dans notre étude de la stabilité de la non-hyperbolicité de (M, ω, J_0, g_0) , nous allons être amenés à considérer des structures $J \in \mathcal{J}(\omega) = \{J \text{ } g_0\text{-uniformément compatible avec } \omega\}$, la notion de Q -minimalité, généralisation de la minimalité, interviendra naturellement. Bangert l'introduisait déjà dans son étude de la stabilité de la non-hyperbolicité du tore. Il utilisait un lemme sur les courants Q -minimisants de \mathbb{R}^{2n} . Toutefois ce résultat était propre à \mathbb{R}^{2n} . J'ai donc établi des résultats similaires dans le cadre de variétés plus générales. Ces résultats feront l'objet de la partie suivante.

5.2.2 Principaux résultats

Rappelons tout d'abord le résultat sur les courants Q -minimisants de \mathbb{R}^{2n} .

Proposition 5.2.1 *Pour toutes constantes $Q > 1$, $m_0 > 0$, il existe une constante $c = c(Q, m_0)$ telle que : pour tout $\rho > 0$, si S est un 2-courant Q -minimisant dans \mathbb{R}^{2n} tel que $\partial S \subset B(c\rho)$ et $M(S) \leq m_0 \rho^2$, alors $\text{spt}(S) \subset B(\rho)$.*

Ce résultat est une étape clé de la démonstration par Bangert de la stabilité de la non-hyperbolicité du tore. On souhaiterait donc obtenir des résultats équivalents dans le cadre de variétés plus générales.

Afin de généraliser ce résultat, j'ai adapté la démonstration dans le cadre des variétés de Stein et je montre :

Proposition 5.2.2 *Soit (M, ω, J_0, ψ) une variété de Stein à géométrie I_δ -bornée. Notons m sa dimension isopérimétrique. Alors pour tout $Q > 1$, pour tout $m_0 > 0$, il existe une constante $c_0 = C(Q, m_0) > 0$ telle que si S est une surface Q -minimisante avec $\partial S \subset M_{c_0 a}$ et $\text{aire}(S) \leq m_0 a^{(1+\delta)\frac{m}{2}}$ alors $S \subset M_a$.*

Dém. : Tout d'abord considérons la projection p_a sur M_a le long des trajectoires du flot de $\nabla \psi$. Plus précisément si l'on considère ϕ_t le flot de $X = \frac{\nabla \psi}{|\nabla \psi|^2}$, alors pour tout $x \in M$ et pour

tout $t \in \mathbb{R}$, $\psi(\phi_t(x)) = \psi(x) + t$. On définit donc p_a par :

$$p_a(x) = \begin{cases} x & \text{si } \psi(x) \leq a \\ \phi_{a-C}(x) & \text{si } \psi(x) = C > a \end{cases}$$

On vérifie que :

Lemme 5.2.2 *Si le Hessien de ψ vérifie $\text{Hess } \psi(v, v) \geq A \frac{|\nabla \psi|^2}{\psi} |v|^2$ pour $v \in \{d\psi = 0\}$, alors, si $b > a$, sur $\{\psi \geq b\}$,*

$$|(p_a)_*|^2 \leq \left(\frac{a}{b}\right)^{2A} \quad (5.5)$$

Dém. : Sur $\{\psi > a\}$, il est clair que $(p_a)_*(X) = 0$ et que $(p_a)_*(V) = (\phi_{a-b})_*(V)$ pour $V \in T\{\psi = b\}$ (où $b > a$). Notons que si $V \in \{d\psi = 0\}$, alors pour tout t , $(\phi_t)_*V \in \{d\psi = 0\}$. Ainsi, il faut donc montrer que pour $V \in T\{\psi = b\}$, $|(\phi_{a-b})_*(V)|^2 \leq \left(\frac{a}{b}\right)^{2A} |V|^2$. Pour cela, minorons $|(\phi_t)_*V|^2$ pour $t > 0$ et $V \in T\{\psi = \text{constante}\} = \{d\psi = 0\}$.

Or si on note $\theta(t) = |(\phi_t)_*V|^2$, on vérifie de façon immédiate que $\theta'(t) = \frac{2}{|\nabla \psi|^2} \text{Hess } \psi(V, V)$.

D'où, $\theta'(t) \geq \frac{2A}{\psi} |V|^2 = 2A \frac{\theta(t)}{t + \psi(x_0)}$ et l'intégration de cette inégalité prouve alors le lemme. ■

Considérons maintenant S un 2-courant Q -minimisant tel que $\partial S \subset M_{a_0}$ et que $\text{aire}(S) \leq m_0 a^{(1+\delta)\frac{m}{2}}$.

Soit $\gamma > 1$ quelconque (on le fixera plus tard). On note $a_j = \gamma^{\frac{j}{2A}} a_0$, de sorte que sur $\{\psi \geq a_{j+1}\}$, $|(p_{a_j})_*| \leq \gamma^{-1}$. Puis on regarde les courants Q -minimisants $S_j = S \cap \{\psi \geq a_j\}$. On a donc : $\text{aire}(S_j) \leq Q \text{aire}(p_{a_j}(S_j))$. Comme $|(p_{a_j})_*| \leq \gamma$ sur S_{j+1} , on obtient :

$$(1 - \gamma^{-2}) \text{aire}(S_{j+1}) \leq (1 - Q^{-1}) \text{aire}(S_j).$$

et donc finalement pour tout j ,

$$\text{aire}(S_j) \leq \left(\frac{1 - Q^{-1}}{1 - \gamma^{-2}}\right)^j \text{aire}(S_0). \quad (5.6)$$

Or par hypothèse, $\text{aire}(S_0) \leq \text{aire}(S) \leq m_0 a^{(1+\delta)\frac{m}{2}}$.

Qu'en est-il de $\text{aire}(S_j)$? S'il existe un point x de S tel que $\psi(x) = R^2$ avec $R^2 > a_j$, on voudrait pouvoir la minorer en fonction de R (l'équation ci-dessus permettrait alors de majorer un tel R).

On prouve alors le lemme :

Lemme 5.2.3 *Soit m une valeur isopérimétrique de M . Alors il existe $C = C(Q, M)$ tel que : si S est Q -minimisant dans M avec $z \in S$ tel que $\{\psi(z) = R^2\}$ et $\partial S \subset \{\psi \leq a\}$, alors*

$$\text{aire}(S) \geq C \left(\int_{\sqrt{a}}^R \frac{1}{\beta_0(s)} ds \right)^m.$$

Dém. : En effet, si l'on note $a(t) = \text{aire}(S \cap \{R - t \leq \sqrt{\psi} \leq R\})$ et $l(t) = \text{longueur}(S \cap \{\psi = R - t\})$, alors la formule de l'aire s'écrit :

$$a'(t) \geq \frac{2}{\beta_0(R - t)} l(t).$$

Comme S est Q -minimisant et par définition de la valeur isopérimétrique, il existe une constante c ne dépendant que de M et de Q telle que $l(t) \geq c(a(t))^{1-\frac{1}{m}}$. Ainsi

$$a'(t) \geq c \frac{2}{\beta_0(R-t)} (a(t))^{1-\frac{1}{m}},$$

et l'intégration prouve le lemme. ■

Au vu de ce lemme 5.2.3, l'équation (5.6) devient :

$$\int_{\sqrt{a_j}}^R \frac{1}{\beta_0(s)} ds \leq C \left(\frac{1-Q^{-1}}{1-\gamma^{-2}} \right)^{\frac{j}{m}} (m_0 a^{(1+\delta)\frac{m}{2}})^{\frac{1}{m}} \quad (5.7)$$

Comme par hypothèse $\beta(s) \leq cs^\delta$ pour des constantes c et $\delta \geq 0$, et comme $\beta(s) = \beta_0(\sqrt{s})^2$, il existe c' tel que $\beta_0(s) \leq c's^\delta$, et donc, $\int_{\sqrt{a_j}}^R \frac{1}{\beta_0(s)} ds \geq C'(R^{1+\delta} - (\sqrt{a_j})^{1+\delta})$. Finalement :

$$R^{1+\delta} - \left(\gamma^{\frac{j}{4A}} \sqrt{a_0} \right)^{1+\delta} \leq C \left(\frac{1-Q^{-1}}{1-\gamma^{-2}} \right)^{\frac{j}{m}} m_0^{\frac{1}{m}} a^{(1+\delta)\frac{1}{2}} \quad (5.8)$$

Afin de terminer la preuve de la proposition 5.2.2 reste maintenant à montrer qu'il existe un $C > 0$ ne dépendant pas de a , de S et de Q tel que si $a_0 \leq C a$ alors (5.8) implique $R \leq a$.

Pour cela choisissons tout d'abord $\gamma > 1$ tel que $\left(\frac{1-Q^{-1}}{1-\gamma^{-2}} \right) = 1 - \frac{1}{2Q}$. Alors, $\left(\frac{1-Q^{-1}}{1-\gamma^{-2}} \right)^{\frac{j}{m}} \rightarrow 0$ quand $j \rightarrow \infty$.

On peut alors fixer un j (indépendamment de a) tel que $\left(\frac{1-Q^{-1}}{1-\gamma^{-2}} \right)^{\frac{j}{m}} m_0^{\frac{1}{m}} \leq 1$. Alors, $R^{1+\delta} \leq (\sqrt{a_j})^{1+\delta} + \frac{(\sqrt{a})^{1+\delta}}{2}$ avec $a_j = \gamma^{\frac{A_j}{2}} a_0$. Ainsi, si l'on pose $c_0 = \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{1+\delta}} \gamma^{-\frac{A_j}{2}}$, la proposition 5.2.2 est bien vérifiée. ■

Ce résultat implique immédiatement :

Corollaire 5.2.1 *L'hypothèse 2 implique l'hypothèse 1 dans le théorème 5.1.3. Et l'hypothèse 2 du théorème 5.1.2 implique l'hypothèse 2 du théorème 5.1.1.*

Dém. : La propriété isopérimétrique de 1 et 2 découle immédiatement de la proposition 5.2.2 étant donnée la majoration $\mu(M_a) = O(a^{(1+\delta)\frac{m}{2}})$ dans 2 et 2.

Pour 2 implique 2, on remarque de plus que comme $\beta(s) \leq cs^\delta$, $a^{1-\delta} \leq C \frac{a}{\beta(a)}$. ■

On peut également adopter une démarche plus métrique, c'est-à-dire s'intéresser aux boules $B(r)$, plutôt que se concentrer sur les ensembles $\{\phi \leq a\}$. Pour cela on se place dans le cadre d'une variété à bouts coniques définie à la section 2.2.6 munies de la fonction distance ρ et on regarde les ensembles $B(r) = \{\rho \leq r\}$ (pour $r \geq 1$). Nous allons voir que l'hypothèse de "suffisante positivité" sur le Hessien correspond à une courbure radiale "pas trop positive dans ce contexte".

Plus précisément je montre :

Proposition 5.2.3 *Soit M est une variété à bouts à courbure radiale bien majorée. Alors pour tout $Q > 1$ et tout $m_0 > 0$, il existe une constante $C = C(Q, m_0)$ telle que, pour tout $R_0 > 1$, si une surface Q -minimisante S vérifie $\partial S \subset B(CR_0)$ et $\text{aire}(S) \leq m_0 R_0^m$ (avec m une valeur isopérimétrique de M) alors $S \subset B(R_0)$.*

Dém. : Tout d'abord, considérons p_r la projection radiale sur $B(r)$. De façon similaire au lemme 5.2.2 on vérifie que si $\text{Hess} \rho \geq \frac{\mu}{\rho} H$ avec $H = g_0 - d\rho \otimes d\rho$, alors $|(p_r)_*| < \left(\frac{r}{R}\right)^\mu$ sur $\{\rho > R\}$. Or nous avons vu (section 2.2.6) que cette hypothèse était vérifiée si la courbure radiale était majorée sur $\{\rho = s\}$ par $\text{curv}(s) \leq K(s)$ avec $\int sK(s) \leq 1 - \mu < 1$. Ainsi

Lemme 5.2.4 *Si la courbure radiale sur $\{\rho = s\}$ vérifie $\text{curv} \leq K(s)$ avec $\int sK(s) \leq 1 - \mu < 1$ alors la projection p_r sur une boule $B(r)$ vérifie $|(p_r)_*| < \left(\frac{r}{R}\right)^\mu$ sur $\{\rho > R\}$.*

Pour R_0 fixé quelconque, on considère maintenant une surface Q -minimisante S vérifiant $\partial S \subset B(r_0)$ et $\text{aire}(S) \leq m_0 R_0^m$.

On peut alors appliquer le même raisonnement que ci-dessus pour la proposition 5.2.2 en considérant $S_j = S \cap \{\rho > r_j\}$ avec $r_j = \gamma^{\frac{1}{\mu}} r_0$ (γ étant à déterminé plus tard), et on obtient

$$\text{aire}(S_j) \leq \left(\frac{1 - Q^{-1}}{1 - \gamma^{-2}} \right)^j \text{aire}(S_0).$$

Supposons qu'il existe $x \in S$ tel que $\rho = R$. Suivant la même idée que celle du lemme 5.2.3 (mais plus simple puisque $|d\rho| = 1$), on a

Lemme 5.2.5 *Si m est une valeur isopérimétrique de M , pour tout $Q \geq 1$, il existe $C > 0$ telle que pour tout courant S Q -minimisant tel que $\partial S \subset \{\rho \leq r\}$ et tel qu'il existe $x \in S \cap \{\rho = R\}$ avec $R > r$, alors, $\text{aire}(S) \geq c(R - r)^m$.*

Ainsi il existe c tel que pour tout j (avec $r_j \leq R$), $\text{aire}(S_j) \geq c(R - r_j)^m$. De plus par hypothèse $\text{aire}(S_0) \leq \text{aire}(S) \leq m_0 R_0^m$. Finalement on obtient :

$$R \leq \gamma^{\frac{1}{\mu}} r_0 + C \left(\frac{1 - Q^{-1}}{1 - \gamma^{-2}} \right)^{\frac{j}{m}} m_0^{\frac{1}{m}} R_0. \quad (5.9)$$

On souhaiterait que cette inégalité implique $R \leq R_0$.

On fixe alors γ de sorte que $\left(\frac{1 - Q^{-1}}{1 - \gamma^{-2}} \right) = 1 - \frac{1}{2Q}$, puis j tel que $\left(1 - \frac{1}{2Q} \right)^{\frac{j}{m}} m_0^{\frac{1}{m}} \leq \frac{1}{2}$. Alors si on pose $r_0 = \frac{\gamma^{-\frac{1}{\mu}}}{2} R_0$, l'inégalité (5.9) implique $R \leq R_0$. Finalement la proposition est bien vérifiée avec $C = \frac{\gamma^{-\frac{1}{\mu}}}{2}$ (qui ne dépend pas de R_0). ■

Dans le cadre des variétés de Stein on en déduit :

Corollaire 5.2.2 *Soit (M, ω, J, ψ) une variété de Stein géométrie II_δ -bornée. Supposons qu'elle est suffisamment non symplectique hyperbolique i.e. vérifie : $\mu(M_a) \leq c a^{(1-\delta)\frac{m}{2}}$ où m est une valeur isopérimétrique de M .*

Alors pour tout $Q > 1$ il existe une constante $C = C(Q)$ telle que si une surface Q -minimisante S vérifie $\partial S \subset B(C\mu(M_{a+1})^{\frac{1}{2}})$ et $\text{aire}(S) \leq \mu(M_{a+1})$ alors $S \subset M_a$.

Dém. : On a vu lors de la remarque 2.2.1 que

$$B\left(\frac{2s}{\beta_0(s)}\right) \subset M_{s^2} \quad (5.10)$$

Ainsi, comme $\beta(s) \leq cs^\delta$, on vérifie que

$$B(c'a^{\frac{1-\delta}{2}}) \subset B\left(2\sqrt{\frac{a}{\beta_0(a)}}\right) \subset M_a. \quad (5.11)$$

Pour montrer le corollaire ci-dessus, il suffit donc de montrer que sous les hypothèses ci-dessus $S \subset B(R_0)$ avec $R_0 = c'a^{\frac{1-\delta}{2}}$.

Par hypothèse il existe un c tel que $\mu(M_{a+1}) \leq ca^{(1-\delta)\frac{m}{2}} = c'' R_0^m$.

Or la proposition ci-dessus nous fournit un C_0 tel que pour tout $R_0 > 1$, si une surface Q -minimisante S vérifie $\partial S \subset B(C_0 R_0)$ et $\text{aire}(S) \leq c'' R_0^m$ alors $S \subset B(R_0)$.

En posant $C = \frac{C_0}{c}$, si S vérifie $\partial S \subset B(C\mu(M_{a+1})^{\frac{1}{2}})$ et $\text{aire}(S) \leq \mu(M_{a+1})$, alors $\partial S \subset B(C_0 R_0^{\frac{m}{2}}) \subset B(C_0 R_0)$ et $\text{aire}(S) \leq c R_0^m$, et donc $S \subset B(R_0)$. ■

Une conséquence immédiate de ce corollaire est :

Corollaire 5.2.3 *L'hypothèse 1. du théorème 5.1.2 implique l'hypothèse 1 du théorème 5.1.1.*

5.3 Étude générale de la stabilité

5.3.1 Preuve des théorèmes 5.1.1, 5.1.3 et 5.1.4

Soient (M, ω, J_0, ψ) une variété de Stein, et, avec les notations habituelles, $M_a = \{\psi \leq a\}$, g_0 la métrique associée à ω et J_0 et $|\cdot|$ la norme associée. On suppose que (M, ω) n'est pas fortement symplectique hyperbolique et donc pour tout a , $\mu(M_a, \omega) < \infty$.

Considérons maintenant une structure pseudo-complexe J uniformément compatible avec ω , c'est-à-dire qu'elle vérifie par définition : il existe des constantes $C > 0$ et $\alpha > 0$ telles que :

$$\begin{cases} (i) & \forall v, |Jv| \leq C|v| \\ (ii) & \forall v, \omega_0(v, Jv) \geq \alpha|v|^2, \end{cases} \quad (5.12)$$

et ainsi les métriques $\omega(.J) = g$ et g_0 sont équivalentes.

Toutefois ∂M_a n'est pas a priori J -convexe et on ne peut donc pas, malgré la non symplectique hyperbolicité, obtenir directement des disques J -holomorphes. Toutefois,

$$\mathcal{J} = \{\text{structure pseudo-complexe } J \text{ sur } M \text{ compatible avec } \omega_0\}$$

est un ensemble contractile et ainsi il existe $H : [0, 1] \rightarrow \mathcal{J}$ tel que $\forall x \in M$, $H_0(x) = J(x)$, $H_1(x) = J_0$, et $\forall t$, H_t vérifie les propriétés (i) et (ii) de (5.12).

Alors pour tout $a > 0$, on considère $\lambda_a : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, C^∞ , valant 0 pour $x \leq a$ et 1 pour $x \geq a + 1$. On définit alors $J_a \in \mathcal{J}$ par $J_a(x) = H_{\lambda_a(\psi(x))}(x)$. Elle vérifie :

$$\begin{cases} (i) & \forall v, |J_R v| \leq C|v| \\ (ii) & \forall v, \omega_0(v, Jv) \geq \alpha|v|^2 \\ (iii) & J_a = J \text{ sur } M_a \\ (iv) & J_a = J_0 \text{ hors de } M_{a+1} \end{cases} \quad (5.13)$$

Ainsi J_a est uniformément compatible (pour les mêmes coefficients C et α de (i) et (ii) dans (5.13)) avec ω , et M_{a+1} est J_a -convexe. Comme $\mu(M_a) < \infty$, si on fixe $x_0 \in M$, le théorème 4.1.1 nous fournit des applications J_a -holomorphes $f_a : \mathbb{D} \rightarrow M_{a+1}$ avec :

$$\begin{cases} (i) & f_a(0) = x_0 \\ (ii) & f_a(\partial\mathbb{D}) \subset \partial M_{a+1} \\ (iii) & \text{aire}_{g_a}(f_a) \leq \mu(M_{a+1}) \end{cases}$$

Notons que les J_a étant uniformément compatibles avec ω pour des constantes C et α indépendantes de a (voir 5.13), les f_a sont donc Q -minimisantes pour un Q indépendant de a ($Q = \frac{C}{\alpha}$).

Ceci étant fait, pour obtenir la non-hyperbolicité complexe de (M, J) on doit “couper” les courbes J_a -holomorphes f_a afin d’obtenir des courbes à image dans M_a et donc des courbes J -holomorphes.

Dans le cas particulier de \mathbb{R}^{2n} la proposition 5.2.1 concernant les courants Q -minimisants de \mathbb{R}^{2n} permet de réaliser cette opération. En effet dans ce cas-là, M_a est la boule $B(\sqrt{a})$; de plus $\mu(M_{a+1}) \leq ca$ pour une constante $c > 0$ et donc les courbes f_a vérifient $\text{aire}(f_a) \leq ca$.

Notons alors $c = c(Q, c)$ la constante fournie par la proposition 5.2.1. Il existe $r_a \in [c\sqrt{a} - \epsilon, c\sqrt{a}]$ (pour $\epsilon > 0$ petit) tel que $S_a = f_a^{-1}(\mathbb{S}_{r_a})$ soit une sous-variété compacte de dimension 1 de \mathbb{D} . On peut alors considérer D_a le plus grand disque topologique tel que $\partial D_a \subset S_a$ et $0 \in D_a$ et la courbe $f_a|_{D_a}$ vérifie :

$$\begin{cases} (i) & \partial f_a(D_a) \subset \mathbb{S}_{r_a}, \text{ with } r_a \in [c\sqrt{a} - \epsilon, c\sqrt{a}] \\ (ii) & \text{aire}(f_a(D_a)) \leq \text{aire}(f_a) \leq ca \end{cases}$$

En appliquant la proposition 5.2.1 avec $\rho = \sqrt{a}$, on peut conclure que $f_a(D_a) \subset B(\rho) = M_a$ et donc $f_a|_{D_a}$ est J -holomorphe. Finalement en reparamétrisant par un biholomorphisme entre D_a et \mathbb{D} on obtient des courbes J -holomorphe $h_a : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ avec

$$\begin{cases} (i) & \text{aire}(h_a) \leq ca \\ (ii) & h_a(0) = 0 \\ (iii) & h_a(\partial\mathbb{D}) \subset \mathbb{S}_{r_a} \text{ with } r_a > C\sqrt{a} - 1 \end{cases}$$

La proposition 3.1.6 permet alors de (re)-montrer le théorème 5.1.5 de Bangert. Notre objectif est maintenant d’utiliser les “généralisations” de la proposition 5.2.1 obtenues dans la partie précédente afin de généraliser cette construction au cas de variétés plus générales et par là-même de démontrer notre théorème principal.

Nous avons vu (corollaire 5.2.3) que l’hypothèse 1. impliquait l’hypothèse 1. Montrons maintenant que l’hypothèse 1. implique bien le résultat de stabilité de la non complexe hyperbolicité énoncée dans notre théorème.

Les courbes J_a -holomorphes f_a sont Q -minimisantes (pour un Q indépendant de a). Soit $C = C_Q > 0$ la constante fournie par l’hypothèse 1.. (Quitte éventuellement à prendre plutôt comme précédemment dans le cas de \mathbb{R}^{2n} une valeur très proche de $C\sqrt{\mu(M_{a+1})}$ par valeurs inférieures), $S_a = f_a^{-1}(\mathbb{S}_{C\sqrt{\mu(M_{a+1})}})$ est une sous-variété compacte de dimension 1 de \mathbb{D} . Soit alors D_a le plus grand disque topologique de \mathbb{C} tel que $\partial D_a \subset S_a$ et $0 \in D_a$. Les courbes pseudo-holomorphes

$f_a|_{D_a}$ satisfont :

$$\begin{cases} \text{aire}(f_a(D_a)) \leq \mu(M_{a+1}) \\ f_a(\partial D_a) \subset \mathbb{S}_{C\sqrt{\mu(M_{a+1})}} \subset B(x_0, C\sqrt{\mu(M_{a+1})}), \end{cases}$$

et donc d'après l'hypothèse 1. $f_a(D_a) \subset M_a$. Les courbes $f_a|_{D_a}$ sont donc J -holomorphes. On poursuit avec le raisonnement habituel : on reparamètre via un biholomorphisme de \mathbb{D} sur D_a et on obtient ainsi des courbes J -holomorphes $h_a : \mathbb{D} \rightarrow M_a$ avec :

$$\begin{cases} (i) & \text{aire}(h_a) \leq \mu(M_{a+1}) \\ (ii) & h_a(0) = x_0 \\ (iii) & h_a(\partial \mathbb{D}) \subset \mathbb{S}(x_0, C\sqrt{\mu(M_{a+1})}) \end{cases}$$

Alors $\text{aire}(h_a) = O(d(h_a(0), h_a(\partial \mathbb{D})))$ et la proposition 3.1.6 implique donc que (M, ω, J) est non pseudo-Kähler hyperbolique (et ce pour tout J uniformément compatible avec ω).

Pour les autres hypothèses nous avons vu dans la partie précédente que 2. impliquait 1. et que 2. impliquait 2. Voyons donc comment obtenir notre résultat à partir de 1. et 2.

Comme les f_a sont Q -minimisantes (pour la même constante Q), on considère la constante $C > 0$ fournie par ces hypothèses associées à ce Q . Et on applique une nouvelle fois le raisonnement habituel : en considérant $S_a = f_a^{-1}(\{\psi = C a\})$ (ou éventuellement $f_a^{-1}(r_a)$ avec r_a proche de $C a$ par valeurs inférieures), puis D_a le plus grand disque topologique tel que $\partial D_a \subset S_a$ et $0 \in D_a$, on obtient des disques J -holomorphe $h_a : \mathbb{D} \rightarrow M_a$ avec :

$$\begin{cases} (i) & \text{aire}(h_a) \leq \mu(M_{a+1}) \\ (ii) & h_a(0) = x_0 \\ (iii) & h_a(\partial \mathbb{D}) \subset \{\psi = C a\}. \end{cases}$$

Il y a alors deux façons d'aborder le problème et de terminer la preuve (correspondant respectivement aux hypothèses 2. et 1.).

Soit on remarque comme en (2.16) et (5.11) que $d(x_0, \{\psi = C a\}) \geq 2\sqrt{\frac{C a}{\beta(C a)}}$. Alors si $\mu(M_{a+1}) = O\left(\frac{C a}{\beta(C a)}\right)$, on peut appliquer le lemme 3.1.6 et (M, ω, J) est non pseudo-Kähler hyperbolique pour toute structure pseudo-complexe uniformément compatible avec ω .

Soit on suppose que $|\text{dd}^c \psi| < C$ pour une constante C et la métrique g_0 (comme $|\text{dd}^c_{J_0} \psi| = 1$ cela sera notamment le cas si J est suffisamment C^1 -proche de J_0 mais il s'agit d'une hypothèse nettement plus faible que celle de la proposition 5.1.1). Dans ce cas-là on vérifie que $\tau(h_a) \geq C' a$. En effet, il est aisé de voir (de façon similaire au lemme 3.2.1 comme ici h_a est J -holomorphe) que :

$$\int_0^{2\pi} \psi \circ h_a(e^{i\theta}) d\theta - 2\pi \psi \circ h_a(0) = \int_0^1 \frac{d\rho}{\rho} \int_{\mathbb{D}(\rho)} h_a^* \text{dd}^c_J \psi.$$

De plus, par hypothèse,

$$\int_0^1 \frac{d\rho}{\rho} \int_{\mathbb{D}(\rho)} h_a^* \text{dd}^c_J \psi \leq C \tau(h_a),$$

et ainsi on obtient, $\tau(h_a) \geq C'a$. Ainsi, si $\mu(M_a) = O(a)$, c'est-à-dire si M est non symplectique hyperbolique, alors on peut appliquer la proposition 3.2.2 et on obtient donc bien que pour tout J uniformément compatible avec ω tel que $|\mathrm{dd}^c \psi| < C$ (pour une constante C et la métrique g_0), (M, ω, J) n'est pas pseudo-Kähler hyperbolique.

On a ainsi prouvé le théorème 5.1.1 et 5.1.3. Comme on le disait cela implique également le théorème 5.1.2.

La démonstration du théorème 5.1.4 suit la même idée mais s'avère être bien plus simple. On considère (M, J_0, g) une variété à bouts vérifiant les hypothèses du théorème (et plus précisément uniquement la première puisqu'elle est impliquée par la seconde). Comme la courbure radiale est majorée par une fonction K adéquate, nous avons vu à la proposition 2.2.7 que $\mathrm{dd}^c \rho^2$ était bien une forme symplectique compatible avec J_0 . Ainsi les ensembles $B(a)$ sont J_0 convexes. Si J est une forme pseudo-complexe uniformément compatible avec $\mathrm{dd}^c \rho^2$ (pour la métrique g), on peut, en suivant l'idée développée auparavant, construire :

$$\begin{cases} (i) & \forall v, |J_R v| \leq C|v| \\ (ii) & \forall v, \omega_0(v, Jv) \geq \alpha|v|^2 \\ (iii) & J_a = J \text{ sur } B(a) \\ (iv) & J_a = J_0 \text{ hors de } B(a+1) \end{cases}$$

puis, en suivant le raisonnement habituel, des applications J_a -holomorphes $f_a : \mathbb{D} \rightarrow B(a+1)$ avec :

$$\begin{cases} (i) & f_a(0) = x_0 \\ (ii) & f_a(\partial\mathbb{D}) \subset \partial B(a+1) \\ (iii) & \mathrm{aire}_{g_a}(f_a) \leq \mu(B(a+1)) \leq m_0 a^m \end{cases}$$

Alors, comme les courbes f_a sont toutes Q -minimisantes pour un même Q , en posant $C = C(Q, m_0)$ la constante fournit par la proposition 5.2.3 on obtient finalement (les explications sont les mêmes que celles de la preuve du théorème 5.1.1) des courbes $h_a : \mathbb{D} \rightarrow M$ avec :

$$\begin{cases} (i) & \partial h_a(\mathbb{D}) \subset \mathbb{S}_{r_a}, \text{ with } r_a \in [C a - \epsilon, C a] \\ (ii) & \mathrm{aire}(h_a(\mathbb{D})) \leq m_0 a^m \leq m_0 a^2 \end{cases}$$

Et finalement, la proposition 3.1.6 termine la preuve.

5.3.2 Preuve des corollaires 5.1.1 et 5.1.2

Voyons maintenant comment déduire du théorème les différentes applications et exemples donnés section 5.1.2.

Plaçons pour cela dans le cadre de variétés du type $W = M \setminus H$ en conservant les notations habituelles. De plus, $|\cdot|$ désigne la métrique associée à ω et J_0 . et $|\cdot|_0$ désignera celle associée à ω_0 et J_0 .

Notons que

$$\omega = \psi \omega_0 + \psi \, \mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}^c \phi \tag{5.14}$$

Par un simple calcul, on vérifie donc que :

$$|d\psi|^2 = \psi \frac{|d\phi|_0^2}{1 + |d\phi|_0^2}.$$

Or d'après l'égalité (??), si H est pseudo-transverse (i.e $|\partial s| > c|s|^\alpha$ avec $0 \leq \alpha < 1$), alors $|d\phi|_0 \geq c\psi^{1-\alpha}$ et ainsi,

$$\frac{\psi^{1-\alpha}}{C + \psi^{1-\alpha}} \leq \frac{|d\psi|^2}{\psi} \leq 1. \quad (5.15)$$

On en déduit alors des estimations des fonctions fondamentales α et β . Tout d'abord $\beta(s) \leq 1$ (soit avec les notations des théorèmes, $\delta = 0$).

De plus $\frac{1}{\alpha(\sqrt{s})^2} \leq 1 + \frac{1}{s^{1-\alpha}}$. Alors l'estimation (2.14) de la capacité permet de conclure qu'il existe une constante C tel que $\mu(M_a, \omega) \leq C a$ (avec $M_a = \{\psi \leq a\}$).

Ainsi si W vérifie les hypothèses du corollaire 5.1.1 alors l'hypothèse 2. ou 1. du théorème 5.1.2 est vérifiée et l'on a la conclusion souhaitée.

Afin d'obtenir le corollaire 5.1.2, on conserve les hypothèses (et donc également les conclusions du corollaire 5.1.1).

Comme l'hypothèse 2. ou 1. du théorème 5.1.2 est vérifiée par (W, J, ω, ψ) , pour tout J uniformément compatible avec ω , on obtient (voir la démonstration du théorème 5.1.1) une suite d'applications $f_a : \mathbb{D} \rightarrow M_a$, J -holomorphes, vérifiant soit

$$\begin{cases} (i) & \text{aire}(f_a) \leq \mu(M_{a+1}) \\ (ii) & f_a(0) = x_0 \\ (iii) & f_a(\partial\mathbb{D}) \subset \{\psi = C a\}, \end{cases}$$

dans le cas où le Hessien est bien minoré, soit

$$\begin{cases} (i) & \text{aire}(f_a) \leq \mu(M_{a+1}) \\ (ii) & f_a(0) = x_0 \\ (iii) & f_a(\partial\mathbb{D}) \subset \mathbb{S}(C\sqrt{a}), \end{cases}$$

dans le cas où la courbure radiale est bien majorée. En fait on a juste montré que $f_a(\partial\mathbb{D}) \subset \mathbb{S}(x_0, c\sqrt{\mu(M_{a+1})})$, mais dans notre cas précis actuel, on a vu que $\mu(M_a) \leq C a$ (pour une constante C).

Si l'on suppose de plus que J est uniformément compatible avec ω_0 , alors, en utilisant le théorème de Stokes on montre que :

$$\text{aire}(f_a, g_0) \leq C \int_{\mathbb{D}} f_a^* \omega_0 = C' \frac{1}{a} \int_{\mathbb{D}} f_a^* \omega \leq C'' \frac{1}{a} \mu(M_a) \leq C_0. \quad (5.16)$$

Dans le cas de l'hypothèse sur la courbure radiale, on a alors directement que $\text{aire}(f_a, g_0) = o(d_{g_0}(f_a(\partial\mathbb{D}), f_a(0)))$. Ainsi d'après la proposition 3.1.6, (W, J, g_0) n'est pas pseudo-Kähler hyperbolique, et plus précisément pas g_0 -hyperbolique. Comme (W, g_0) est relativement compacte dans M , on en déduit que (W, J) n'est pas hyperboliquement plongé dans M . Et la dernière remarque est alors évidente (en prenant la limite on obtient une courbe entière J -holomorphe).

Dans le cas d'un Hessien bien majoré si on suppose de surcroît que $|ddd_f \phi|_0 \leq A$ (pour une constante A), on a d'ores et déjà montré dans la section précédente qu'alors,

$$\tau(f_a, \omega_0) \geq B \inf_{f_a(\partial \mathbb{D})} \phi \circ f_a,$$

et donc ici $\tau(f_a) \geq C' a$. On a alors $\text{aire}(f_a, g_0) = o(\tau(f_a, \omega_0))$. La proposition 3.2.3 nous permet alors de conclure.

Prouvons maintenant la proposition 5.1.2. La démonstration, est, nous allons le voir, très technique. Toutefois ce résultat est important car il permet d'obtenir un large champ d'applications pour nos théorèmes 5.1.2 et 5.1.3.

5.3.3 Preuve de la proposition 5.1.2 et ses corollaires

Analyse générale

Pour commencer notre étude, restons dans le cadre général de $W = M \setminus H$ et conservons les notations de la partie précédente.

Notre objectif est de démontrer que le Hessien est bien minoré : $\text{Hess } \psi(v, v) \geq A \frac{|\nabla \psi|^2}{\phi} |v|^2$ pour $v \in \{d\phi = 0\}$.

Dans ce contexte, particulier, nous avons vu que :

$$|d\psi|^2 = \psi \frac{|d\phi|_0^2}{1 + |d\phi|_0^2}.$$

Ainsi, l'hypothèse se lit :

$$\text{Hess } \psi(v, v) \geq A \frac{|d\phi|_0^2}{1 + |d\phi|_0^2} |v|^2 \quad (5.17)$$

Étudions cette condition plus précisément :

Notons $\nabla \psi$ le champ de gradient de ψ pour la métrique g et $\nabla \phi$ le champ de gradient de ϕ pour la métrique g_0 . Comme, $g(u, v) = \psi(g_0(u, v) + d\phi(u)d\phi(v) + d\phi(Ju)d\phi(Jv))$, on en déduit aisément que $\nabla \psi = \frac{\nabla \phi}{1 + |\nabla \phi|_0^2}$ où $|\cdot|_0$ désigne la norme pour g_0 .

Aussi, pour $v \in T_{x_0}\{d\psi = \text{constante}\}$, on a $\text{Hess } \psi(v, v) = g(D_v \nabla \psi, v) = \frac{1}{1 + |\nabla \phi|_0^2} g(D_v \nabla \phi, v)$, avec D la connection de Levi-Cevita de g . En prolongeant v en un champ de vecteurs V vérifiant $\mathcal{L}_V(\nabla \phi) = -\mathcal{L}_{\nabla \phi} V = 0$ (i.e si θ_t est le flot de $\nabla \phi$, $V = (\theta_t)_* v$ le long des trajectoires de gradient de ϕ), on obtient que $\text{Hess } \psi(v, v) = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + |\nabla \phi|_0^2} \mathcal{L}_{\nabla \phi}(g(V, V))$. Et finalement, vu l'expression de g en fonction de g_0 :

$$\text{Hess } \psi(v, v) = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + |\nabla \phi|_0^2} \mathcal{L}_{\nabla \phi} \left(e^\psi (g_0(v, v) + d\phi(V)^2 + d\phi(JV)^2) \right). \quad (5.18)$$

Tout d'abord notons que $\mathcal{L}_{\nabla \phi} d\phi(JV)^2 = 2d\phi(JV)\mathcal{L}_{\nabla \phi}(\omega_0(\nabla \phi, -V))$. Aussi, comme $\mathcal{L}_{\nabla \phi} \omega_0 = \omega_0$ et que $\mathcal{L}_{\nabla \phi} V = \mathcal{L}_{\nabla \phi} \nabla \phi = 0$, on a en x_0 , $\mathcal{L}_{\nabla \phi} d\phi(JV)^2 = 2d\phi(Jv)^2$.

De même, comme par hypothèse $d\phi(v) = 0$, en x_0 $\mathcal{L}_{\nabla \phi} d\phi(V)^2 = 0$.

De plus, $\mathcal{L}_{\nabla \phi}(g_0(v, v)) = 2g_0(D_{\nabla \phi}^0 V, V)$, avec D^0 la connection de Levi-Cevita de g_0 . Et comme

$\mathcal{L}_{\nabla\phi}V = 0$, on obtient en x_0 $\mathcal{L}_{\nabla\phi}(g_0(v, v)) = 2g_0(D_v^0\nabla\phi, v)$.

Finalement, comme $\mathcal{L}_{\nabla\phi}e^\phi = e^\phi|\nabla\phi|_0^2$, (5.18) devient :

$$\text{Hess } \psi(v, v) = \frac{1}{2} \frac{|\nabla\phi|_0^2}{1 + |\nabla\phi|_0^2} g(v, v) + \frac{\psi}{1 + |\nabla\phi|_0^2} d\phi(Jv)^2 + \frac{\psi}{1 + |\nabla\phi|_0^2} g_0(D_v^0\nabla\phi, v) \quad (5.19)$$

Afin de vérifier l'hypothèse requise sur le Hessien (5.17), le seul terme qui nous est "inconnu" et qui pose problème est le dernier. En fait, on constate qu'il suffit de montrer qu'il existe $\alpha < \frac{1}{2}$ tel que

$$g_0(D_v^0\nabla\phi, v) \leq \alpha |\nabla\phi|_0^2 \frac{g(v, v)}{\psi} = \alpha |\nabla\phi|_0^2 (g_0(v, v) + d\phi(Jv)^2) \quad (5.20)$$

Tentons de voir ce que ce terme $g_0(D_v^0\nabla\phi, v)$ vaut dans des cas où $D^0\nabla\phi$ est aisément calculable.

Nous allons donc considérer le cas particulier où $M = \mathbb{P}^n\mathbb{C}$ et où $\Sigma = \{P = 0\}$ avec P un polynôme homogène de degré k sur \mathbb{C}^{n+1} . Alors $\phi = -\log\left(\frac{|P(z)|^2}{|z|^{2k}}\right)$ (où $|z|$ désigne la norme euclidienne habituelle de z dans \mathbb{C}^{n+1}) et $\omega_0 = dd^c\phi = 4k\bar{\omega}$, avec $\bar{\omega}$ la structure symplectique canonique de $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$. Précisons que l'on a normalisé $\bar{\omega}$ de sorte que pour $z \in \mathbb{C}^{n+1}$, pour $u, v \in H_z = \{u \text{ tel que } \langle u, z \rangle = \langle u, iz \rangle = 0\} \simeq T_z\mathbb{P}^n\mathbb{C}$, $\bar{g}(u, v) = \bar{\omega}(u, J_0v) = \frac{\langle u, v \rangle}{|z|^2}$ (où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire euclidien canonique de $\mathbb{R}^{2n+2} \simeq \mathbb{C}^{n+1}$).

Ainsi, \bar{g} et sa connection de Levi-Cevita \bar{D} étant connues, on peut donc calculer $\nabla\phi$, puis $D_v^0\nabla\phi$ et enfin le terme de (5.20) $g_0(D_v^0\nabla\phi, v)$. Ces calculs feront l'objet de la prochaine section :

Evaluation du Hessien

Dorénavant nous identifierons $H_z = \{u \text{ tel que } \langle u, z \rangle = \langle u, iz \rangle = 0\} = \{u \text{ tel que } \langle u, z \rangle_{\mathbb{C}} = 0\}$ avec $T_z\mathbb{P}^n\mathbb{C}$ (avec $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}}$ le produit hermitien canonique de \mathbb{C}^{n+1}), et on désignera par $p = p_z$ la projection orthogonale de \mathbb{C}^{n+1} sur H_z ($p_z(v) = v - \langle v, z \rangle_{\mathbb{C}} \frac{z}{|z|^2}$, et p_z est \mathbb{C} -linéaire).

Le gradient de ϕ dans \mathbb{C}^{n+1} pour la métrique euclidienne canonique est $X_1 = 2\left(\frac{k}{|z|}z - \frac{1}{\bar{P}}\frac{\partial\bar{P}}{\partial z}\right)$, où $\frac{\partial\bar{P}}{\partial z}$ désigne le vecteur ayant pour coordonnées $(\frac{\partial\bar{P}}{\partial z})_j = \frac{\partial\bar{P}}{\partial z_j}$. Alors, le gradient de ϕ pour \bar{g} est $|z|^2 p_z(X_1)$, et ainsi :

$$\nabla\phi = -\frac{|z|^2}{2k} p_z\left(\frac{1}{\bar{P}}\frac{\partial\bar{P}}{\partial z}\right)$$

Or, comme P est un polynôme homogène de degré k , $\langle \frac{\partial\bar{P}}{\partial z}, z \rangle_{\mathbb{C}} = k\bar{P}(z)$. Finalement,

$$\nabla\phi = -\frac{|z|^2}{2k\bar{P}} \frac{\partial\bar{P}}{\partial z} + \frac{z}{2} \in H_z \quad (5.21)$$

Alors pour $v \in H_z$, $D_v^0\nabla\phi = \bar{D}_v\nabla\phi = p(D_v^{euc}\nabla\phi) = \frac{|z|^2}{2k} p_z\left(d\left(\frac{\partial\bar{P}}{\partial z}\right)(v)\right) + \frac{v}{2}$. Et ainsi, comme $v \in H_z$, $\langle v, p(u) \rangle = \langle v, u \rangle$ pour tout $u \in \mathbb{C}^{n+1}$:

$$g_0(D_v^0\nabla\phi, v) = \frac{1}{2}g_0(v, v) - 2\left\langle \partial\left(\frac{1}{\bar{P}}\frac{\partial\bar{P}}{\partial z}\right)(v), v \right\rangle = \frac{1}{2}g_0(v, v) - 2\langle \bar{W}, v \rangle, \quad (5.22)$$

avec la notation habituelle :

$$\left(\partial \left(\frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial z} \right) (v) \right)_j = \partial \left(\frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial z_j} \right) (v) = \sum_{i=0}^n \frac{\partial \left(\frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial z_j} \right)}{\partial z_i} v_i,$$

et où l'on note $W = \partial \left(\frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial z} \right) (v)$. Ainsi afin de vérifier l'hypothèse sur le Hessien, on est ramené à calculer des dérivées usuelles de polynômes et fractions rationnelles et un produit scalaire euclidien usuel : on doit estimer $\langle \partial \left(\frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial z} \right) (v), v \rangle = \langle \overline{W}, v \rangle$.

Dorénavant, afin de simplifier les notations, nous nous placerons en des relevés de $[z] \in \mathbb{P}^n \mathbb{C}$ tels que $|z| = 1$.

Tout d'abord, exprimons la quantité essentielle : $|\nabla \phi|_0$. Vu (5.21),

$$|\nabla \phi|_{euc}^2 = \sum_{j=0}^n \frac{|z_j|^2}{4} + \sum_{j=0}^n \frac{1}{4k^2 |P|^2} \left| \frac{\partial P}{\partial z_j} \right|^2 - \frac{1}{4k} \left\langle \frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial z}, z \right\rangle_{\mathbb{C}} - \frac{1}{4k} \left\langle z, \frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial z} \right\rangle_{\mathbb{C}}.$$

Ainsi, $|\nabla \phi|_{euc}^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{k^2 |P|^2} \sum_{j=0}^n \left| \frac{\partial P}{\partial z_j} \right|^2 - 1 \right)$ et donc pour g_0

$$|\nabla \phi|_0^2 = k \left(\frac{1}{k^2 |P|^2} \sum_{j=0}^n \left| \frac{\partial P}{\partial z_j} \right|^2 - 1 \right). \quad (5.23)$$

Ainsi, au vu de (5.22), comme par hypothèse $|\nabla \phi|_0^2 \rightarrow \infty$ la condition (5.20) est vérifiée si et seulement si il existe $\alpha < \frac{1}{4}$ tel que

$$|\langle \overline{W}, v \rangle| \leq \alpha |\nabla \phi|_0^2 (g_0(v, v) + d\phi(Jv)^2), \quad (5.24)$$

(et comme $g_0(v, v) = 4k |v|_{euc}^2$) si et seulement si il existe $\alpha < 1$ tel que

$$|\langle \overline{W}, v \rangle| \leq \alpha \frac{1}{|P|^2} \sum_{j=0}^n \left| \frac{\partial P}{\partial z_j} \right|^2 \left(|v|_{euc}^2 + \frac{1}{4k} d\phi(Jv)^2 \right). \quad (5.25)$$

Considérons maintenant $v \in H_z = \{u \text{ tel que } \langle u, z \rangle_{\mathbb{C}} = 0\} \simeq T_{[z]} \mathbb{P}^n \mathbb{C}$ tel que $d\phi(v) = 0$, ce qui signifie que $\Re \left(\sum_{j=0}^n \frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial z_j} v_j \right) = 0$. On distinguera deux cas : celui où $d\phi(Jv) = 0$ et celui où $v = J\nabla \phi$.

Considérons tout d'abord le premier. Le vecteur v vérifie ainsi $\Im \left(\sum_{j=0}^n \frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial z_j} v_j \right) = 0$ et donc $\sum_{j=0}^n \frac{\partial P}{\partial z_j} v_j = 0$. On a donc $\partial P(v) = 0$. Aussi $W = \partial \left(\frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial z} \right) (v) = \frac{1}{P} \partial \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right) (v)$ et $W_j = \left(\partial \left(\frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial z} \right) (v) \right)_j = \frac{1}{P} \sum_{i=0}^n \frac{\partial^2 P}{\partial z_i \partial z_j} v_i$. Finalement dans le cas où $d\phi(Jv) = 0$,

$$\langle \overline{W}, v \rangle = \Re \left(\frac{1}{P} \sum_{i,j=0}^n \frac{\partial^2 P}{\partial z_i \partial z_j} v_i v_j \right)$$

Ainsi on montre bien que s'il existe $\alpha < 1$ tel que pour tout $v \in \mathbb{C}^{n+1}$ avec $\langle v, z \rangle_{\mathbb{C}} = 0$ et $\partial P(v) = 0$,

$$\left| \frac{1}{P} \sum_{i,j=0}^n \frac{\partial^2 P}{\partial z_i \partial z_j} v_i v_j \right| \leq \alpha \frac{1}{|P|^2} \sum_{j=0}^n \left| \frac{\partial P}{\partial z_j} \right|^2 |v|_{euc}^2,$$

alors l'inégalité (5.25) et donc la minoration du Hessien sera vérifiée pour tout v tel que $d\phi(Jv) = 0$.

Considérons maintenant $v = J\nabla\phi$. Alors $v_j = i\frac{z_j}{2} - \frac{i}{2k\bar{P}}\frac{\partial P}{\partial z_j}$ et $\partial\left(\frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial z_j}\right)(v) = \frac{-1}{P^2}\frac{\partial P}{\partial z_j}\left(\sum_{i=0}^n\frac{\partial P}{\partial z_i}v_i\right) + \frac{1}{P}\sum_{i=0}^n\frac{\partial^2 P}{\partial z_i\partial z_j}v_i$ s'exprime en utilisant que P (resp. $\frac{\partial P}{\partial z_j}$) est un polynôme homogène de degré k (resp. de degré $k-1$) et donc que $\sum_{i=0}^n\frac{\partial P}{\partial z_i}z_i = kP(z)$ (resp. $\sum_{i=0}^n\frac{\partial^2 P}{\partial z_i\partial z_j}z_i = (k-1)\frac{\partial P}{\partial z_j}$). Ainsi,

$$W_j = \frac{i}{2P}\frac{\partial P}{\partial z_j}\left(\frac{1}{k|P|^2}\sum_{i=0}^n\left|\frac{\partial P}{\partial z_i}\right|^2 - 1\right) + \frac{i}{2P}(k-1)\frac{\partial P}{\partial z_j} - \frac{i}{2k|P|^2}\sum_{i=0}^n\frac{\partial^2 P}{\partial z_i\partial z_j}\frac{\bar{\partial P}}{\partial z_i}.$$

Soit vue l'expression de la norme de $\nabla\phi$ dans (5.23) on a :

$$W_j = \frac{i}{2P}(|\nabla\phi|_0^2 + (k-1))\frac{\partial P}{\partial z_j} - \frac{i}{2k|P|^2}\sum_{i=0}^n\frac{\partial^2 P}{\partial z_i\partial z_j}\frac{\bar{\partial P}}{\partial z_i}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\langle \bar{W}, v \rangle &= \frac{-1}{4}\Re\left(\frac{1}{P}(|\nabla\phi|_0^2 + k-1)\sum_j\frac{\partial P}{\partial z_j}z_j - \frac{1}{k|P|^2}(|\nabla\phi|_0^2 + k-1)\sum_j\left|\frac{\partial P}{\partial z_j}\right|^2\right) \\ &\quad + \frac{1}{4}\Re\left(\frac{1}{k|P|^2}\sum_i\sum_j\frac{\partial^2 P}{\partial z_i\partial z_j}\frac{\bar{\partial P}}{\partial z_i}z_j - \frac{1}{k^2|P|^2\bar{P}}\sum_i\sum_j\frac{\partial^2 P}{\partial z_i\partial z_j}\frac{\bar{\partial P}}{\partial z_i}\frac{\bar{\partial P}}{\partial z_j}\right)\end{aligned}$$

Etant donnée la k -homogénéité de P le premier terme vaut :

$$\frac{1}{4}(|\nabla\phi|_0^2 + (k-1))|\nabla\phi|_0^2.$$

De même en utilisant la $(k-1)$ -homogénéité de $\frac{\partial P}{\partial z_i}$, on voit que le deuxième terme vaut :

$$\frac{k-1}{4k}(|\nabla\phi|_0^2 + (k-1)) - \frac{1}{4k^2}\Re\left(\frac{1}{|P|^2\bar{P}}\sum_i\sum_j\frac{\partial^2 P}{\partial z_i\partial z_j}\frac{\bar{\partial P}}{\partial z_i}\frac{\bar{\partial P}}{\partial z_j}\right)$$

Or $g_0(v, v) = |\nabla\phi|_0^2$, $d\phi(Jv) = |\nabla\phi|_0^2$. Ainsi vue l'expression de $\langle \bar{W}, v \rangle$ obtenue ci-dessus, comme les termes en $|\nabla\phi|_0^2$ et $|\nabla\phi|_0^4$ seront négligeables hors d'un compact devant $|\nabla\phi|_0^6$, l'inégalité (5.24) est équivalente à ce qu'il existe $\alpha < 1$ tel que

$$\left|\frac{1}{k^2|P|^2\bar{P}}\sum_i\sum_j\frac{\partial^2 P}{\partial z_i\partial z_j}\frac{\bar{\partial P}}{\partial z_i}\frac{\bar{\partial P}}{\partial z_j}\right| \leq \alpha|\nabla\phi|_0^6$$

Or (en appliquant deux fois l'inégalité de Cauchy-Schwarz),

$$\left|\frac{1}{k^2|P|^2\bar{P}}\sum_i\sum_j\frac{\partial^2 P}{\partial z_i\partial z_j}\frac{\bar{\partial P}}{\partial z_i}\frac{\bar{\partial P}}{\partial z_j}\right| \leq \frac{1}{k^2|P|^2|P|}\left(\sum_{i,j}\left|\frac{\partial^2 P}{\partial z_i\partial z_j}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=0}^n\left|\frac{\partial P}{\partial z_j}\right|^2\right)$$

qui est équivalent à :

$$\frac{1}{k|P|} \left(\sum_{i,j} \left| \frac{\partial^2 P}{\partial z_i \partial z_j} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} |\nabla \phi|_0^2.$$

Pour vérifier l'inégalité (5.24) et donc la minoration du Hessien pour $v = J\nabla \phi$, il est donc bien suffisant de montrer que

$$\frac{1}{|P|} \left(\sum_{i,j} \left| \frac{\partial^2 P}{\partial z_i \partial z_j} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = o(|\nabla \phi|_0^4) = o \left(\left(\frac{1}{|P|^2} \sum_{j=0}^n \left| \frac{\partial P}{\partial z_j} \right|^2 \right)^2 \right).$$

Cas de section transverse ou pseudo-transverse

Considérons le cas où la section est transverse, c'est-à-dire $\sum_{j=0}^n \left| \frac{\partial P}{\partial z_j} \right|^2 \geq C_0$ hors d'un compact (pour C_0 une constante > 0). Alors toutes les hypothèses de la proposition 5.1.2 sont vérifiées. En effet on peut majorer $\sum_{i,j} \left| \frac{\partial^2 P}{\partial z_i \partial z_j} \right|^2$ par une constante sur $\{|z| = 1\} \subset \mathbb{C}^{n+1}$. L'hypothèse sur le Hessien est donc bien vérifiée et on peut appliquer les corollaires 5.1.1 et 5.1.2. On a alors directement le résultat du corollaire 5.1.4.

Exemple de $\mathbb{P}^n \mathbb{C} \setminus k$ hyperplans

Dans ce cas $P = \prod_{j=0}^{k-1} z_j$. Ainsi,

$$\frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial z_j} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \geq k \\ \frac{1}{z_j} & \text{si } j \leq k-1 \end{cases} \quad (5.26)$$

D'après (5.23), on a donc :

$$|\nabla \phi|_0^2 = k \left(\frac{1}{k^2 |P|^2} \sum_{j=0}^n \left| \frac{\partial P}{\partial z_j} \right|^2 - 1 \right) = k \left(\frac{1}{k^2} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{|z_j|^2} - 1 \right) \quad (5.27)$$

De plus,

$$\frac{1}{P} \frac{\partial^2 P}{\partial z_i \partial z_j} = \begin{cases} \frac{1}{z_i z_j} & \text{si } j \neq i \leq k-1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (5.28)$$

Nous allons voir que les hypothèses de la proposition 5.1.2 sont vérifiées.

Considérons $v \in H_z$ avec $d\phi(v) = d\phi(Jv) = 0$, c'est-à-dire $\partial P(v) = 0$, soit $\sum_{j=0}^{k-1} \frac{v_j}{z_j} = 0$. Ainsi, d'un côté :

$$\left| \frac{1}{P} \sum_{i,j=0}^n \frac{\partial^2 P}{\partial z_i \partial z_j} v_i v_j \right| = \left| \sum_{i \neq j \leq k-1} \frac{v_i v_j}{z_i z_j} \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \left(\sum_{j=0}^{k-1} \frac{v_j}{z_j} \right)^2 - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{v_j^2}{z_j^2} \right| \\
&= \left| \sum_{j=0}^{k-1} \frac{v_j^2}{z_j^2} \right| \\
&\leq \sum_{j=0}^{k-1} \left| \frac{v_j}{z_j} \right|^2
\end{aligned}$$

D'un autre côté :

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{P} \sum_{i,j=0}^n \frac{\partial^2 P}{\partial z_i \partial z_j} v_i v_j \right| &= \left| \sum_{i \neq j \leq k-1} \frac{v_i v_j}{z_i z_j} \right| \\
&\leq \sum_{i \neq j \leq k-1} \left| \frac{v_i v_j}{z_i z_j} \right|
\end{aligned}$$

D'où finalement

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{P} \sum_{i,j=0}^n \frac{\partial^2 P}{\partial z_i \partial z_j} v_i v_j \right| &\leq \frac{1}{2} \left(\sum_{i \neq j \leq k-1} \left| \frac{v_i v_j}{z_i z_j} \right| + \sum_{j=0}^{k-1} \left| \frac{v_j}{z_j} \right|^2 \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\sum_{j=0}^{k-1} \left| \frac{v_j}{z_j} \right| \right)^2 \\
&\leq \frac{1}{2} \left(\sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{|z_j|^2} \right) \left(\sum_j |v_j|^2 \right),
\end{aligned}$$

et l'hypothèse (5.3) de la proposition 5.1.2 est satisfaite.

Pour la condition (5.4), on remarque que :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|P|} \left(\sum_{i,j} \left| \frac{\partial^2 P}{\partial z_i \partial z_j} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\sum_{i \neq j \leq k-1} \frac{1}{|z_i|^2 |z_j|^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\left(\sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{|z_j|^2} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{|z_j|^2}
\end{aligned}$$

Or cela est équivalent à $(k|\nabla\phi|_0^2 \text{ i.e. à } \frac{1}{|P|^2} \sum_{j=0}^n \left| \frac{\partial P}{\partial z_j} \right|^2)$. Et la condition (5.4) est bien satisfaite.

5.3.4 Preuve des résultats sur les variétés-produits de 5.1.3

Pour le théorème 5.1.6, notons tout d'abord que si une valeur isopérimétrique de M $m_M = 2$ et si celle de N est supérieure ou égale à deux alors une valeur isopérimétrique de $M \times N$ est égale à 2.

De plus, par définition de la courbure radiale, on vérifie aisément qu'en un point $(x, y) \in M \times N$, la courbure radiale de $M \times N$ vérifie :

$$\text{curv}_{M \times N}(x, y) \leq \max(\text{curv}_M(x), \text{curv}_N(y)).$$

En effet le vecteur radial de $M \times N$ $\partial_{M \times N} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_M + \partial_N)$ et le tenseur de courbure est la somme des deux tenseurs de courbure (puisque la métrique est la métrique produit). Ainsi

$$\text{curv}_{M \times N}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sup_{\substack{v_1 \in TM, v_2 \in TN \\ |v_1|^2 + |v_2|^2 = 1}} (|v_1| \text{curv}_M(x) + |v_2| \text{curv}_N(y)), \text{ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz}$$

fournit l'inégalité souhaitée. On en déduit alors que si par exemple $K_M = 0$ alors :

$$K_{M \times N}(s) \leq K_N(s).$$

Ainsi si à la fois la courbure radiale de M est nulle et celle de N vérifie $\int s K(s) < 1$, alors celle de $M \times N$ vérifie cette même hypothèse (les rôles de M et N pouvant bien-sûr être échangés). La démonstration est alors similaire à celle du théorème 5.1.4. On considère les ensembles $M_a = B_M(a) \times B_N(a)$. Ils sont J_0 -convexes (pour $J_0 = J_M \times J_N$) et leur capacité $\mu(M_a, \omega) \leq \mu(B_M(a), \omega_M) \leq Ca^2$ (pour $\omega = \text{dd}^c \rho_M^2 \otimes \omega_N$).

Pour J uniformément compatible avec ω fixé, on construit des J_a ($= J$ sur M_a , J_0 hors de M_{a+1}) et on obtient des applications f_a , J_a -holomorphes, avec $\text{aire}(f_a) \leq Ca^2$ et $f_a(\partial) \subset \partial M_{a+1}$, qu'il va s'agir de couper. Pour cela on peut appliquer la proposition 5.2.3. En effet celle-ci est énoncée pour les boules $B_{M \times N}(R)$. Mais comme $B_M(\frac{a}{\sqrt{2}}) \times B_N(\frac{a}{\sqrt{2}}) \subset B_{M \times N}(a) \subset B_M(a) \times B_N(a) = M_a$, on en a une même version pour les ensembles M_R . Ainsi finalement on obtient une suite d'applications J -holomorphes $h_a : \mathbb{D} \rightarrow M \times N$ avec $\text{aire}(h_a) \leq Ca^2$ et $h_a(\partial D) \subset \partial M_{c_0 a}$. Et la proposition 3.1.6 conclue la preuve du théorème 5.1.6.

La preuve du théorème 5.1.7 est similaire. On utilise juste que, étant données les hypothèses, la dimension isopérimétrique de $M \times N$ est égale à celle de M . De plus les deux variétés étant à Hessien fortement minoré, on vérifie que $M \times N$ l'est également et donc a fortiori est à Hessien bien minoré. On peut donc appliquer à cette variété le raisonnement de la preuve du théorème 5.1.1.

Troisième partie

Structures feuilletées paraboliques

Chapitre 6

Introduction et motivation de l'étude

6.1 Mesure hyperbolicité

Une idée similaire à celle de la Kobayashi-hyperbolicité permet de définir l'hyperbolicité de la mesure : comme la Kobayashi-hyperbolicité correspond à la non-dégénérescence de la distance de Kobayashi, de même l'hyperbolicité de la mesure correspond à la non-dégénérescence d'une mesure construite sur la variété à partir d'applications holomorphes de polydisques dans la variété.

Expliquons cela plus précisément.

Si M^{2n} est une variété complexe, on définit (comme on avait défini la pseudo-distance de Kobayashi) dans un premier temps la mesure de Kobayashi Ψ_M . Pour cela on considère le polydisque $\mathbb{D}^n = \mathbb{D} \times \cdots \times \mathbb{D}$ (à ne pas confondre avec le disque hyperbolique que nous notons généralement \mathbb{D}^{2n} , $\mathbb{D}^{2n} = \{z, |z| < 1\} \subset \mathbb{C}^n$). A la métrique hyperbolique produit (le n -tenseur de la métrique hyperbolique sur le disque \mathbb{D}) est naturellement associée une forme volume, et ainsi le polydisque est naturellement muni d'une mesure, appelée la **mesure hyperbolique** et que l'on notera Ψ_n . On va alors transporter cette mesure sur les variétés complexes M via des applications holomorphes.

Définition 6.1.1 Si A est un ensemble de Borel contenu dans M , on définit la mesure de Kobayashi de A par :

$$\Psi_M(A) = \inf_{\{(f_i)_i, (U_i)_i\} \in \mathcal{F}_A} \sum_{i=1}^{\infty} \Psi_n(U_i),$$

où $\{(f_i)_i, (U_i)_i\} \in \mathcal{F}_A$ si les applications $f_i : \mathbb{D}^n \rightarrow M$ sont holomorphes, si, pour tout i , $U_i \subset \mathbb{D}^n$, et si $A \subset \cup_i f_i(U_i)$.

On vérifie notamment que :

1. Il s'agit bien d'une mesure.
2. Toute application holomorphe $f : M^{2n} \rightarrow N^{2n}$ est décroissante pour les mesures de Kobayashi de M et N .
3. La mesure de Kobayashi du polydisque $\Psi_{\mathbb{D}^n}$ est la mesure hyperbolique Ψ_n .

Définition 6.1.2 Soit (M, J) une variété complexe. Elle est dite *mesure-hyperbolique* si pour tout ouvert $U \subset M$ non vide $\Psi_M(U) > 0$.

Comme on montre que s'il existe une application holomorphe non constante $f : \mathbb{C} \rightarrow M$ non constante alors M n'est pas Kobayashi-hyperbolique, on montre là :

Lemme 6.1.1 *S'il existe une application holomorphe non constante $f : \mathbb{D}^{n-1} \times \mathbb{C} \rightarrow M^{2n}$ alors M n'est pas mesure-hyperbolique.*

Notons que ces définitions ne peuvent être cette fois généralisées au cas pseudo-complexe. En effet si on choisit une structure pseudo-complexe quelconque, de telles applications (pseudo-)holomorphes du polydisque dans la variété peuvent ne pas exister. Et on a même que si de telles applications existent, alors nécessairement la structure pseudo-complexe est intégrable (sur toutes les images de ces applications).

De même l'existence d'une application $f : \mathbb{D}^{n-1} \times \mathbb{C} \rightarrow M^{2n}$ pseudo-holomorphe implique l'intégrabilité de la structure pseudo-complexe. Aussi la notion de mesure-hyperbolicité n'a-t-elle de sens que dans le cadre complexe (intégrable).

Toutefois, plusieurs problèmes intéressants relient ces idées avec celles de notre étude pseudo-complexe. Une première notion apparaît comme un lien naturel entre les questions que nous avons évoquées dans le début de notre thèse et l'hyperbolicité de la mesure (et plus précisément en fait l'existence de courbes holomorphes $f : \mathbb{D}^{n-1} \times \mathbb{C}$) : il s'agit de la notion de feuilletages paraboliques, i.e. feuilletages par feuilles isomorphes à \mathbb{C} . Nous allons expliquer cela.

6.2 Des courbes entières aux structures paraboliques feuilletées

Rappelons tout d'abord les définitions de feuilletages.

Tout d'abord dans le cadre différentiable, une variété M (de dimension réelle n) est dite munie d'un **feuilletage** \mathcal{F} de dimension réelle k si M s'écrit comme l'union de feuilles $(F_\alpha)_\alpha$, toutes de dimension réelle k , deux à deux disjointes, telles que pour tout $x_0 \in M$, il existe un ouvert, dit de trivialisatation, $U \ni x_0$ et un difféomorphisme $f : U \rightarrow \mathbb{B}^{n-k}(1) \times \mathbb{B}^k(1)$ telle que pour toute feuille F_α intersectant U , chaque composante connexe de $F_\alpha \cap U$ soit envoyée difféomorphiquement sur un $\{x\} \times \mathbb{B}^k$ pour un $x \in \mathbb{B}^{n-k}$.

Dans notre cas nous nous intéresserons aux variétés de dimension $2n$ paire et aux feuilletages de dimension réelle 2.

Dans le cas où M est munie d'une structure pseudo-complexe J , il est particulièrement intéressant de considérer les feuilletages de M par des feuilles complexes, c'est-à-dire telles que, pour toute feuille F , pour tout point $x \in F$, $T_x F$ soit invariant par J et donc soit un sous espace complexe (de dimension réelle 2 et donc de dimension complexe 1) de $T_x M$.

Dans le cas où M^{2n} est une variété complexe, on définit les **feuilletages holomorphes** : un feuilletage \mathcal{F} est un feuilletage holomorphe de dimension complexe 1 si pour tout $x \in M$, il existe un ouvert U dit de trivialisatation holomorphe contenant x , et un biholomorphisme $\phi : U \rightarrow \mathbb{D}^{n-1} \times \mathbb{D}$ tels que pour toute feuille F_α intersectant U , chaque composante connexe de $F_\alpha \cap U$ soit envoyée biholomorphiquement sur un $\{x\} \times \mathbb{D}$ pour un $x \in \mathbb{D}^{n-1}$.

On peut classier les feuilles de tels feuilletages (comme on classifie les surfaces de dimension réelle 2 et ainsi les variétés de dimension complexe 1) : on dira qu'une feuille est parabolique si elle admet un revêtement universel isomorphe à \mathbb{C} , hyperbolique si son revêtement universel est le disque, elliptique sinon.

Voyons maintenant comment cette notion de feuilletages, et plus particulièrement la notion de feuilletages par feuilles paraboliques s'insère naturellement à la fois dans le cadre de notre

6.2. DES COURBES ENTIÈRES AUX STRUCTURES PARABOLIQUES FEUILLETÉES 109

étude et dans le cadre l'hyperbolicité de la mesure.

Dans le cadre de notre étude précédente, nous avons montré que (sous certaines hypothèses de compacité) si M n'était pas symplectique hyperbolique alors il existait une application $f : \mathbb{C} \rightarrow M$ pseudo-holomorphe. Mais on peut se demander s'il en existe-il une à travers chaque point. Auquel cas, les courbes obtenues forment-elles un feuilletage de la variété? Ce feuilletage est alors par construction à feuilles paraboliques. Si la structure est intégrable, est-il holomorphe?

Dès lors que l'on a obtenu un feuilletage holomorphe parabolique le long d'un disque holomorphe plongé, on est ramené à notre sujet initial de mesure-hyperbolicité est : existe-il une application holomorphe $f : \mathbb{D}^{n-1} \times \mathbb{C} \rightarrow M$ qui soit feuilletée, c'est-à-dire qui envoie chaque $\{x\} \times \mathbb{C}$ sur une feuille? Cette dernière question sera l'objet de cette partie; cela constituera un premier pas vers la compréhension de l'ensemble des questions et problèmes exposés ci-dessus.

Chapitre 7

Variété complexe feuilletée paraboliquement

On considère donc une variété complexe X de dimension n (c'est-à-dire de dimension réelle $2n$) munie d'un feuilletage holomorphe \mathcal{F} de codimension 1 dont toutes les feuilles sont paraboliques (i.e. de revêtement universel \mathbb{C}).

On souhaiterait voir sous quelles conditions il existe une application holomorphe $F : \mathbb{D}^{n-1} \times \mathbb{C} \rightarrow X$ qui soit compatible avec le feuilletage, c'est-à-dire qui pour tout $x \in \mathbb{D}$ envoie $\{x\} \times \mathbb{C}$ sur une feuille du feuilletage.

Afin de répondre à cette question, on considère (afin de simplifier les notations) dans un premier temps le cas d'une variété de dimension complexe 2, c'est-à-dire de dimension réelle 4 et j'introduis une classe particulière \mathcal{C} d'applications $F : \mathbb{D} \times \mathbb{C} \rightarrow X$ qui apparaît naturellement comme candidats dans cette étude. Et je montre que si une application du type souhaité existe, alors nécessairement elle appartient à \mathcal{C} . On est donc ramené à étudier l'holomorphie des applications de \mathcal{C} .

Pour toute application $F \in \mathcal{C}$, j'introduis une fonction ω , holomorphe le long des feuilles, qui mesure le défaut d'hyperbolicité de F , nulle si et seulement si F est holomorphe. Cette fonction dépend de F . Toutefois, on constate que si l'une des applications de \mathcal{C} est holomorphe, alors toutes les applications de \mathcal{C} passant par les mêmes points le sont aussi. Cela amène à s'interroger sur l'existence d'un invariant sur X mesurant le défaut d'hyperbolicité de toutes les applications de \mathcal{C} . A cette fin, en étudiant comment la fonction ω varie avec F , je parviens à construire un tenseur invariant Γ , indépendant de F , qui s'annule sur un ouvert si et seulement si les F de \mathcal{C} à valeurs dans cet ouvert sont holomorphes. Cette construction est décrite dans la partie 7.2.4. Γ ne dépend que de la structure du feuilletage et est donc un invariant associé canoniquement au feuilletage qui mesure l'existence de cylindres pseudo-holomorphes compatibles avec le feuilletage. Plus précisément :

Théorème 7.0.1 *Pour $F \in \mathcal{C}$, on peut construire sur U_F , un ouvert de trivialisat on autour de $x_0 = F(0, 0)$, un tenseur*

$$\Gamma_F : TX \times T\mathcal{F} \rightarrow \mathbb{C}$$

Il ne dépend pas de F : si $F' \in \mathcal{C}$ et $U_F \cap U_{F'} \neq \emptyset$, alors $\Gamma_F = \Gamma_{F'}$ sur $U_F \cap U_{F'}$. On peut donc définir $\Gamma = \Gamma_F$. C'est une $(1, 1)$ -forme sur X qui est un invariant du feuilletage et qui s'annule ssi les applications F sont holomorphes. Plus précisément, pour toute $F \in \mathcal{C}$, Γ s'annule sur $F(\mathbb{D} \times \mathbb{C})$ si et seulement si F est holomorphe.

De plus, Γ peut être également vue comme une section holomorphe le long des feuilles du fibré holomorphe $E = \Lambda^{(0,1)}TN \otimes \Lambda^{(1,0)}T\mathcal{F}$ au-dessus de (X, \mathcal{F}) .

Ainsi, si $\Gamma = 0$, alors toutes les applications $F \in \mathcal{C}$ sont holomorphes. Ce foncteur Γ étant une section holomorphe le long des feuilles d'un fibré holomorphe B au-dessus de X , c'est en particulier le cas si ce fibré B n'admet pas de section globale non nulle qui soit holomorphe le long des feuilles.

On montre ensuite que ce résultat se généralise immédiatement au cas des variétés feuilletées paraboliquement de dimension quelconque.

J'analyse enfin des cas particuliers et exemples : je montre notamment que si toutes les feuilles de \mathcal{F} sont compactes alors Γ est identiquement nul et ainsi toutes les applications $F \in \mathcal{C}$ sont holomorphes (on montre en même temps que les groupes fondamentaux des feuilles "varient holomorphiquement" le long de la transversale). D'un autre côté j'exhibe un exemple d'une variété feuilletée (non-compacte) pour laquelle l'invariant Γ est non nul (ainsi l'invariant Γ n'est pas trivial) et qui n'admet donc pas d'applications holomorphes de $\mathbb{D} \times \mathbb{C}$ dans la variété du type souhaité (i.e. respectant la structure feuilletée).

7.1 Etude générale

7.1.1 Construction de \mathcal{C}

On considère donc X une variété de dimension complexe 2 munie d'un feuilletage holomorphe de codimension 1. Pour étudier l'existence d'applications holomorphes de $\mathbb{D} \times \mathbb{C}$ dans X respectant la structure feuilletée, il est naturel de considérer dans un premier temps les fonctions qui apparaissent naturellement comme "candidats". On notera \mathcal{C} l'ensemble de ces fonctions. Décrivons la façon dont elles sont obtenues.

Soit D un disque holomorphe transverse au feuilletage, paramétré holomorphiquement par \mathbb{D} avec lequel on l'identifie. Le long de \mathbb{D} , on se fixe une trivialisatoin $t : \mathbb{D} \rightarrow T\mathcal{F}|_D$ du fibré tangent au feuilletage $T\mathcal{F}$ le long de D . Pour chaque $x \in \mathbb{D}$, la feuille L_x passant par x est parabolique. On note \widetilde{L}_x le revêtement universel de L_x et on considère un revêtement $\psi_x : \widetilde{L}_x \rightarrow L_x$ quelconque. il existe alors un unique biholomorphisme $F_x^0 : \mathbb{C} \rightarrow \widetilde{L}_x$ tel que que l'application $F_x = \psi_x \circ F_x^0$ vérifie $F_x(0) = x$ et $dF_x(1) = t_x$. On obtient ainsi une immersion :

$$F : \begin{cases} \mathbb{D} \times \mathbb{C} & \rightarrow X \\ (x, y) & \rightarrow F_x(y) \end{cases}$$

qui, par construction, est holomorphe par rapport à y et holomorphe sur $\mathbb{D} \times \{0\}$. La question est alors de savoir si elle est holomorphe sur $\mathbb{D} \times \mathbb{C}$ entier.

Si c'est la cas on obtient alors une application holomorphe du type souhaité, i.e. une application holomorphe de $\mathbb{D} \times \mathbb{C}$ dans X respectant la structure feuilletée.

Réciproquement si une application F du type souhaité existe, alors $D = F(\mathbb{D} \times \{0\})$ est un disque holomorphe de X , $t_x = dF_{(x,0)}$ est une trivialisatoin holomorphe de $T\mathcal{F}$ le long de D . Et donc, F peut être obtenue de la façon décrite ci-dessus i.e $F \in \mathcal{C}$.

Ainsi pour notre étude il suffit d'étudier l'holomorphie des applications de \mathcal{C} .

7.1.2 Etude de l'holomorphie de $F \in \mathcal{C}$

Soit $F \in \mathcal{C}$. On considère $J' = F^*J$, où J est la structure complexe sur X . La structure J' se décompose en $J_0 + \Omega$, où J_0 est la structure complexe standard de $\mathbb{D} \times \mathbb{C}$ et Ω est une forme différentielle. Cette forme Ω mesure la non-holomorphie de F puisqu'elle est nulle si et seulement si F est holomorphe. Elle est à valeurs dans $T\mathcal{F}$ (car J et J_0 coïncident sur l'espace quotient \mathbb{D} , pour plus de détails voir Appendice), et s'annule sur les vecteurs tangents au feuilletage (car F est holomorphe en y).

De plus, comme $(J')^2 = -Id$, on en déduit que $\Omega J_0 = J_0 \Omega$, i.e. que Ω est anti-linéaire. Ainsi il existe une fonction $\omega : \mathbb{D} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ vérifiant $\omega|_{\mathbb{D} \times \{0\}} = 0$ telle que

$$\Omega_{(x,y)} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega(x,y)\bar{v}_x \end{pmatrix}.$$

Cette fonction vérifie les propriétés suivantes :

Lemme 7.1.1 *La fonction $\omega : \mathbb{D} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ainsi définie est identiquement nulle si et seulement si F est holomorphe. Elle est holomorphe par rapport à la seconde variable, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{D}$, les fonctions $\omega(x, \cdot)$ sont holomorphes sur \mathbb{C} . De plus, ces fonctions ainsi que leur dérivée s'annulent en zéro.*

Dém. : On sait déjà que F est holomorphe si et seulement si $\Omega = 0$ et donc si et seulement si $\omega = 0$.

De plus, comme F est holomorphe le long de $\mathbb{D} \times \{0\}$, pour tout $x \in \mathbb{D}$, $\omega(x, 0) = 0$.

Pour montrer l'holomorphie le long des feuilles de ω , on traduit l'intégrabilité de J' (comme J est intégrable) : le tenseur de Nijenhuis associé à J' $N_{J'}(X, Y)$ est nul pour tous champs de vecteurs X et $Y \in \Gamma(T(\mathbb{D} \times \mathbb{C}))$. Notons qu'il suffit de le vérifier pour les champs de vecteurs constants (le tenseur de Nijenhuis est de degré 0). Comme J_0 est intégrable, $N_{J'}(X, Y)$ est nul pour tout X, Y , et comme $J' = J_0 + \Omega$,

$$\begin{aligned} N_{J'}(X, Y) &= [\Omega X, J_0 Y] + [J_0 X, \Omega Y] + [\Omega X, \Omega Y] - \Omega[J_0 X, Y] - \Omega[\Omega X, Y] \\ &\quad - J_0[\Omega X, Y] - \Omega[X, J_0 Y] - J_0[X, \Omega Y] - \Omega[X, \Omega Y]. \end{aligned}$$

Prenons $X = (x_1, x_2)$ et $Y = (y_1, y_2)$ deux champs de vecteurs constants sur $\mathbb{D} \times \mathbb{C}$. Comme $\nabla J_0 = 0$ et comme Ω s'annule sur $\mathbb{D} \times \{0\}$ et est à valeurs dans $\{0\} \times \mathbb{C}$, la condition $N_{J'}(X, Y) = 0$ est équivalente à :

$$\begin{aligned} d\omega(J_0 Y)\bar{x}_1 - d\omega(J_0 X)\bar{y}_1 + d\omega(0, \omega\bar{y}_1)\bar{x}_1 \\ - d\omega(0, \omega\bar{x}_1)\bar{y}_1 - J_0 d\omega(Y)\bar{x}_1 + J_0 d\omega(X)\bar{y}_1 = 0. \end{aligned}$$

En choisissant dans un premier temps $y_1 = 0$ et $x_1 \neq 0$, on constate que si J' est intégrable alors ω est holomorphe par rapport à la deuxième variable.

Réciproquement si ω est holomorphe par rapport à la deuxième variable, il est direct qu'alors $N_{J'}(X, Y) = 0$ pour tous champs de vecteurs constants X et Y et donc pour tous champs de vecteurs quelconques.

Ainsi finalement J' (ou, c'est équivalent J) est intégrable si et seulement si ω est holomorphe intégrable par rapport à la seconde variable.

Traduisons maintenant l'holomorphie de $x \longrightarrow t_x = dF_{(x,0)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Plaçons-nous pour cela sur un ouvert de trivialisatation U contenant $F(\mathbb{D} \times \{0\})$ sur lequel le feuilletage \mathcal{F} peut être trivialisé holomorphiquement via une application (J, J_0) -holomorphe $\psi : U \longrightarrow \mathbb{D} \times \mathbb{D}$, qui envoie chaque feuille L_x sur $\{x\} \times \mathbb{D}$ (avec J_0 la structure standard de $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$).

Considérons $\alpha = \psi \circ F$ sur $F^{-1}(U)$. Elle s'écrit $\alpha(x, y) = (\alpha_1(x), \alpha_2(x, y))$, avec α_1 un biholomorphisme de \mathbb{D} et α_2 holomorphe par rapport à y . De plus, en écrivant la condition d'holomorphie de α pour les structures J' et J_0 , on obtient : $2i \frac{\partial \alpha_2}{\partial \bar{x}} = \omega \frac{\partial \alpha_2}{\partial y}$. Soit en dérivant :

$$2i \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial y \partial \bar{x}} = \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} + \omega \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial y^2}. \quad (7.1)$$

Or l'holomorphie de $x \longrightarrow t_x$ se lit dans la trivialisatation : $x \longrightarrow \frac{\partial \alpha_2}{\partial y}(x, 0)$ est holomorphe et donc $\frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial y \partial \bar{x}}(x, 0) = 0$. Comme $\omega(x, 0) = 0$, on en déduit que $\frac{\partial \omega}{\partial y} = 0$ sur $\mathbb{D} \times \{0\}$.

Finalement, $\omega(x, \cdot)$ sont des fonctions holomorphes sur \mathbb{C} qui s'annulent en 0 et dont la dérivée s'annule en 0. De plus, F est holomorphe si et seulement si ces fonctions sont identiquement nulles, ou, ce qui est équivalent, si et seulement si $\frac{\partial \omega}{\partial y} = 0$ (car $\omega = 0$ sur $\mathbb{D} \times \{0\}$ et est une fonction holomorphe en y). ■

7.1.3 Modification sous variation de F

Si l'on considère un autre $\tilde{F} \in \mathcal{C}$ construit comme en 7.1.1, obtenu à partir d'un disque holomorphe \tilde{D} transverse au feuilletage et d'une trivialisatation \tilde{t} de $T\mathcal{F}$ le long de \tilde{D} , on obtient alors comme précédemment un $\tilde{\omega}$ et un $\tilde{\omega}_z$. On souhaiterait comparer ω et $\tilde{\omega}$.

Notons que l'on ne peut bien-sûr comparer ω_z et $\tilde{\omega}_z$, que si $F(z) = \tilde{F}(z')$. Aussi, quitte à restreindre D et \tilde{D} , on peut supposer que

$$F(\mathbb{D} \times \mathbb{C}) = \cup_{x \in D} L_x = \cup_{x \in \tilde{D}} L_x = \tilde{F}(\mathbb{D} \times \mathbb{C}).$$

Ainsi, comme D et \tilde{D} sont deux disques holomorphes transverses, on peut, suivant une idée classique en théorie des feuilletages expliquée en Annexe, construire une biholomorphisme de D sur \tilde{D} , θ_1 , tel que, pour tout $x \in \mathbb{D}$, $L_{\tilde{F}(x,0)} = L_{F(\theta_1(x),0)}$.

Pour tout $x \in \mathbb{D}$, on peut alors considérer le biholomorphisme de \mathbb{C} $\theta_x = F_{\theta_1(x)}^{-1} \circ \tilde{F}_x$. Il s'écrit $a(x)y + b(x)$. Et on définit $\theta : \mathbb{D} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{D} \times \mathbb{C}$ (localement " $\theta = F^{-1} \circ \tilde{F}$ ") par $\theta(x, y) = (\theta_1(x), \theta_2(x, y))$ avec $\theta_2(x, y) = \theta_x(y)$.

On montre ainsi :

Lemme 7.1.2 *Il existe un difféomorphisme $\theta : \mathbb{D} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{D} \times \mathbb{C}$ vérifiant :*

- $\tilde{F} = F \circ \theta$
- $\theta(x, y) = (\theta_1(x), \theta_2(x, y))$ avec θ_1 un biholomorphisme du disque \mathbb{D} et θ_2 une application holomorphe par rapport à la seconde variable telle que pour tout $x \in \mathbb{D}$ l'application $\theta_2(x, \cdot)$ soit un biholomorphisme de \mathbb{C} .

Alors,

$$\frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial y} \bar{\omega}(x, y) = \omega(\theta(x, y)) \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial x} + 2i \frac{\partial \theta_2}{\partial \bar{x}}. \quad (7.2)$$

Ainsi, le changement de la fonction ω est mesuré par le défaut d'holomorphic en x de la fonction θ_2 .

Dém. : Il ne reste qu'à montrer (7.2). Comparons pour cela Ω et $\tilde{\Omega}$: $J_0 + \tilde{\Omega} = (\tilde{F})^* J = (F \circ \theta)^* J = \theta^*(J_0 + \Omega)$. On a donc : $\tilde{\Omega} = \theta^* \Omega + \theta^* J_0 - J_0$, soit $\theta_* \circ \tilde{\Omega} = \Omega \circ \theta_* + J_0 \circ \theta_* - \theta_* \circ J_0$, ce qui se traduit exactement par (7.2). ■

Il est de plus intéressant de constater que si F est holomorphe alors θ est également holomorphe. En effet, F déterminera alors une trivialisation holomorphe du feuilletage dans laquelle le disque \tilde{D} et la trivialisation \tilde{t} auront des expressions holomorphes ; ainsi $a(x)$ et $b(x)$ seront holomorphes en x . Ainsi, n'importe quel autre $\tilde{F} \in \mathcal{C}$ (dont l'image est incluse dans celle de F) sera holomorphe.

Afin de mieux comprendre comment "varie" ω quand on change F , étudions plus précisément θ afin de comprendre quels sont les " θ admissibles". Considérons donc une application

$$\theta : \begin{cases} \mathbb{D} \times \mathbb{C} & \longrightarrow \mathbb{D} \times \mathbb{C} \\ (x, y) & \longrightarrow (\theta_1(x), \theta_2(x, y)) \end{cases}$$

où θ_1 est un biholomorphisme de \mathbb{D} , et pour tout $x, y \longrightarrow \theta_2(x, y)$ est un biholomorphisme de \mathbb{C} , donc de la forme $a(x) + b(x)y$. Quelles sont alors les conditions pour que $\tilde{F} = F \circ \theta$ puisse être construite comme en 7.1.1, c'est-à-dire appartienne à \mathcal{C} ?

Ces conditions s'écrivent :

1. $F(\theta(\mathbb{D} \times \{0\}))$ est un disque holomorphe, i.e. $F_*(\theta_* \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}) = JF_*(\theta_* \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix})$ sur $\mathbb{D} \times \{0\}$, ce qui est équivalent encore à $-2i \frac{\partial \theta_2}{\partial \bar{x}}(x, 0) = \omega(\theta(x, 0)) \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial x}(x, 0)$, $\forall x$.
2. $x \longrightarrow d\tilde{F}_{(x,0)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ doit être holomorphe, i.e. $x \longrightarrow dF_{\theta(x,0)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{\partial \theta_2}{\partial y}(x, 0)$ doit être holomorphe.

On suppose (quitte à choisir dans un premier temps des disques intermédiaires si ce n'est pas le cas) que $\tilde{D} = F(\theta(\mathbb{D} \times \{0\}))$ est suffisamment proche de D , plus précisément qu'il est inclus dans un ouvert U sur lequel \mathcal{F} peut-être trivialisé holomorphiquement, et fixons une trivialisation $\psi : U \longrightarrow \mathbb{D} \times \mathbb{D}$. Comment alors, la condition 2. se lit-elle dans la trivialisation ?

En conservant la notation introduite précédemment $\alpha = \psi \circ F$, la condition 2. se lit dans la trivialisation : $x \longrightarrow \frac{\partial \alpha_2}{\partial y}(\theta(x, 0)) \frac{\partial \theta_2}{\partial y}(x, 0)$ doit être holomorphe. En écrivant que le $\bar{\partial}$ de cette fonction est nulle et en utilisant l'égalité (7.1) et la condition 1, on obtient que (si la condition 1 est vérifiée) la condition 2. est équivalente à :

$$\left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial y} \circ \theta \right) \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \circ \theta \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial x} \frac{\partial \theta_2}{\partial y} + 2i \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial y \partial \bar{x}} \right) = 0 \text{ sur } \mathbb{D} \times \{0\}.$$

Comme $\frac{\partial \alpha_2}{\partial y}$ ne s'annule jamais, et comme seul le terme $\frac{\partial \omega}{\partial y} \circ \theta$ dépend de y , on obtient :

$$\frac{\partial \omega}{\partial y}(\theta(x, 0)) \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial x}(x, y) \frac{\partial \theta_2}{\partial y}(x, y) + 2i \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial y \partial \bar{x}}(x, y) = 0 \text{ sur l'ouvert } F^{-1}(U). \quad (7.3)$$

Ainsi si l'on suppose (quitte à composer par un biholomorphisme du disque) que $\theta_1 = id$, alors le terme perturbatif dans $\tilde{\omega}$ (par rapport à ω) est $\frac{\partial \theta_2}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial a}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial b}{\partial \bar{z}} y$, avec les conditions 1. et 2. sont équivalentes à (vu (7.3)) :

1. $-2i \frac{\partial a}{\partial \bar{z}} = \omega(x, a(x))$
2. $\frac{\partial \omega}{\partial y}(x, a(x)) b(x) + 2i \frac{\partial b}{\partial \bar{z}} = 0$.

Ainsi, a est déterminée par une équation différentielle en $\bar{\partial}$, et une fois qu'une solution a a été fixée, b est à son tour déterminée par une équation différentielle en $\bar{\partial}$.

7.2 Construction d'invariants du feuilletage

La 1-forme Ω et la fonction ω (sur $\mathbb{D} \times \mathbb{C}$) mesurent le défaut d'holomorphicité de l'application F . Toutefois, elles dépendent de la fonction F . Mais, comme nous avons vu qu'une application F_0 était holomorphe si et seulement si toutes les applications $F \in \mathcal{C}$ à valeurs dans $F_0(\mathbb{D} \times \mathbb{C})$ l'étaient, il est légitime et naturel de se poser la question de l'existence d'un invariant du feuilletage mesurant le défaut d'holomorphicité de toutes les applications $F \in \mathcal{C}$.

De façon immédiate, la 1-forme Ω et la fonction ω fournissent localement des formes différentielles sur X (dépendant de F). En étudiant la manière dont elles dépendent de F , je pourrai exhiber un invariant du feuilletage (à la fois global et invariant de F) comme souhaité.

7.2.1 Constructions de formes différentielles

Comme F est un difféomorphisme local sur un voisinage V_F de $z_0 = F(0, 0)$, on peut choisir un inverse local de F , noté (abusivement) F^{-1} à valeurs dans un voisinage de $(0, 0)$ et dont les fonctions coordonnées seront notées par la suite : $F^{-1} = ((F^{-1})_1, (F^{-1})_2)$.

L'application F nous fournit alors une trivialisatation locale de $T\mathcal{F}$ sur V_F :

$$\phi_F : \begin{cases} T\mathcal{F}|_{V_F} & \longrightarrow U_F \times \mathbb{C} \\ \xi_z & \longrightarrow (z, \pi_2(dF_z^{-1}(\xi_z))) \end{cases}$$

Quitte à restreindre V_F , on peut de plus supposer qu'il existe une trivialisatation du feuilletage sur V_F .

Cela étant fait, Ω se lit alors sur V_F comme une 1-forme à valeurs dans $T\mathcal{F}|_{V_F}$ (les restrictions à V_F seront désormais sous-entendues) :

$$\Omega_0 = (F_*) \circ \Omega \circ (F_*)^{-1} : \begin{cases} TX & \longrightarrow T\mathcal{F} \\ X & \longrightarrow JX - F_*(J_0 F_*^{-1} X), \end{cases}$$

et en composant ensuite par ϕ_F , on obtient une 1-forme λ_F :

$$\lambda_F : \begin{cases} TX & \longrightarrow \mathbb{C} \\ X & \longrightarrow \pi_2(F_*^{-1}(JX) - J_0(F_*^{-1}X)) = \pi_2(\Omega(F_*^{-1}X)) = (F^{-1})^* \Omega_2(X) \end{cases}$$

où $\Omega_2 = \pi_2 \circ \Omega$ est une 1-forme.

On remarque que λ_F est nulle le long des feuilles et que $\lambda_F(JX) = -J_0\lambda_F(X)$, c'est-à-dire λ_F est une forme de type $(0, 1)$.

De plus par définition de Ω , pour tout champ de vecteurs X , $\lambda_F(X) = \omega(F^{-1}(z)) \overline{d(F^{-1})_1(X)}$.

Ainsi λ_F est nulle si et seulement si ω est nul sur V_F , i.e. si et seulement si F est holomorphe sur V_F . On peut enfin noter que, avec les notations introduites ci-dessus, $\lambda_F = 2\bar{\partial}((F^{-1})_2)$.

Considérons maintenant la 2-forme $d\lambda_F \in \Lambda^2 X$, $d\lambda_F : TX \times TX \rightarrow \mathbb{C}$. Comme $d = \partial + \bar{\partial}$ et $\bar{\partial}^2 = 0$, cette forme différentielle s'exprime $d\lambda_F = 2\partial\bar{\partial}(F^{-1})_2$ sur V_F , et $d\lambda_F \in \Lambda^{1,1}X$. Considérons maintenant :

$$A_F : \begin{cases} TX \times T\mathcal{F} & \rightarrow T\mathcal{F} \\ (X, Y) & \rightarrow \phi_F^{-1}(d\lambda_F(X, Y)). \end{cases}$$

On déduit des propriétés de λ_F qu'elle est nulle sur $T\mathcal{F} \times T\mathcal{F}$, de type $(0, 1)$ par rapport à la première variable et \mathbb{C} -linéaire par rapport à la seconde. On peut de plus l'écrire en fonction de ω : $A_F(X, Y) = \frac{\partial\omega}{\partial y}(F^{-1}(z)) \overline{d(F^{-1})_1(X)}$. Ainsi A_F est nulle si et seulement si $\frac{\partial\omega}{\partial y}$ est nul sur V_F , c'est-à-dire si et seulement si $\omega = 0$ sur $\mathbb{D} \times \mathbb{C}$ (car les applications $\omega(x, \cdot)$ sont pour tout x holomorphes sur \mathbb{C}), et donc ssi F est holomorphe sur $\mathbb{D} \times \mathbb{C}$.

Notons également qu'étant donnée l'expression de $d\lambda_F$ ci-dessus, F est holomorphe si et seulement si $\partial\bar{\partial}(F^{-1})_2 = 0$ sur $TX \times T\mathcal{F}$ (condition d'harmonicité).

Enfin, on peut remarquer que A_F peut être aussi vue comme une 1-forme à valeurs dans les endomorphismes de $T\mathcal{F}$ $\mathcal{E}nd(T\mathcal{F})$ ($\simeq \mathbb{C}$ car $\dim_{\mathbb{C}} T\mathcal{F} = 1$) :

$$A_F : \begin{cases} TX \rightarrow \mathcal{E}nd(T\mathcal{F}) \simeq \mathbb{C} \\ X \rightarrow (Y \rightarrow A_F(X, Y)) \end{cases}$$

Il s'agit d'une 1-forme de type $(0, 1)$.

7.2.2 Perturbations par passage de F à \tilde{F}

Comme précédemment nous supposons $F(\mathbb{D} \times \mathbb{C}) = \tilde{F}(\mathbb{D} \times \mathbb{C})$ et nous introduisons la fonction θ donnée par le lemme 7.1.2 telle que $F = \theta \circ \tilde{F}$. On montre alors :

Proposition 7.2.1 *Si l'on considère A_F et $A_{\tilde{F}}$ comme des 1-formes à valeurs dans $\mathcal{E}nd(T\mathcal{F})$, alors*

$$\frac{\partial\theta_2}{\partial y} A_{\tilde{F}}(X) = \frac{\partial\theta_2}{\partial y} A_F(X) - 2i \frac{\partial^2\theta_2}{\partial y \partial \bar{x}} (\tilde{F}^{-1}(z)) \overline{d(\tilde{F}^{-1})_1(X)}, \quad (7.4)$$

Dém. : Par définition,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_{\tilde{F}}(X) \end{pmatrix} = (\tilde{F}^{-1})_*(JX) - J_0(\tilde{F}^{-1})_*(X)$$

D'où,

$$\theta_* \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_{\tilde{F}}(X) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_F(X) \end{pmatrix} + J_0\theta_*(\tilde{F}^{-1}X) - \theta_*(J_0\tilde{F}^{-1}X)$$

C'est-à-dire, $\frac{\partial \theta_2}{\partial y} \lambda_{\tilde{F}}(X) = \lambda_F(X) + 2i \frac{\partial \theta_2}{\partial \bar{z}}(\tilde{F}^{-1}(z)) \overline{d(\tilde{F}^{-1})_1(X)}$.

Ainsi en différentiant et en évaluant sur $X \in TX$ et $Y \in T\mathcal{F}$, on obtient :

$\frac{\partial \theta_2}{\partial y} d\lambda_{\tilde{F}}(X, Y) = d\lambda_F(X, Y) - 2i \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial y \partial \bar{z}}(\tilde{F}^{-1}(z)) d(\tilde{F}^{-1})_2(Y) \overline{d(\tilde{F}^{-1})_1(X)}$ (car $d(\tilde{F}_1)(Y) = 0$). Ainsi finalement, comme $\phi_F \circ \phi_{\tilde{F}}^{-1}(z, v) = (z, \frac{\partial \theta_2}{\partial y} v)$, cela implique :

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial y} A_{\tilde{F}}(X, Y) = \frac{\partial \theta_2}{\partial y} A_F(X, Y) - 2i \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial y \partial \bar{z}}(\tilde{F}^{-1}(z)) \overline{d(\tilde{F}^{-1})_1(X)} Y. \quad (7.5)$$

Donc si l'on voit A_F comme une 1-forme à valeurs dans $\mathcal{E}nd(T\mathcal{F}) : A_F : TX \longrightarrow \mathcal{E}nd(T\mathcal{F}) \simeq \mathbb{C}$, la relation (7.5) se lit :

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial y} A_{\tilde{F}}(X) = \frac{\partial \theta_2}{\partial y} A_F(X) - 2i \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial y \partial \bar{z}}(\tilde{F}^{-1}(z)) \overline{d(\tilde{F}^{-1})_1(X)}.$$

■

Notons que, au regard de la relation (7.3), cela peut s'écrire :

$$A_{\tilde{F}}(X) = A_F(X) - \frac{\partial \omega}{\partial y}(F^{-1}(\tilde{\pi}(z))) \overline{d(\tilde{F}^{-1})_1(X)} \frac{\partial \theta_1}{\partial x}(\tilde{F}^{-1}(z)),$$

où $\tilde{\pi}$ est la projection le long des feuilles sur $\tilde{F}(\mathbb{D} \times \{0\})$:

$$\tilde{\pi} : \begin{cases} V_F & \longrightarrow V_F \\ z = \tilde{F}(x, y) & \longrightarrow \tilde{F}(x, 0). \end{cases}$$

Ainsi, vu l'expression de A_F en fonction de ω , il s'ensuit que,

$$A_{\tilde{F}}(X) = A_F(X) - \tilde{\pi}^* A_F(X)$$

On constate donc que le terme perturbatif dans l'expression de A_F quand on change F ne dépend que des valeurs de A_F le long du disque holomorphe \tilde{D} . Ainsi si A_F est identiquement nul, alors $A_{\tilde{F}}$ l'est aussi sur V_F et on retrouve que si F est holomorphe alors \tilde{F} l'est également.

Ces formes différentielles locales ont été obtenues très naturellement à partir de la fonction F . On souhaite dans la prochaine partie montrer un peu mieux ce qu'elles "représentent" : nous allons voir que la forme A_F est étroitement liée à la connection $\bar{\partial}$ naturelle sur $T\mathcal{F}$.

7.2.3 Connexions sur $T\mathcal{F}$

La connection $(0, 1)$ canonique $\bar{\partial}_0$ du fibré trivial de fibre \mathbb{C} au-dessus de U_F est définie par $\bar{\partial}_0(X, \xi) = \bar{\partial}\xi(X)$. Ainsi l'application F détermine naturellement une connection $(0, 1)$ sur le fibré $T\mathcal{F}|_{U_F}$ obtenue à partir de $\bar{\partial}_0 : \bar{\partial}_F = (\phi_F)^{-1} \circ \bar{\partial}_0 \circ \phi_F$.

On peut alors considérer sur $T\mathcal{F}|_{U_F} : \nabla_F = \frac{i}{2} A_F + \bar{\partial}_F$. Il s'agit d'une connection $(0, 1)$ et je montre :

Proposition 7.2.2 *Cette connection $\nabla_F = \frac{i}{2} A_F + \bar{\partial}_F$ est indépendante du choix de F . Plus précisément, il s'agit de la connection $(0, 1)$ canonique sur le fibré holomorphe $T\mathcal{F}$, c'est-à-dire celle définissant la structure holomorphe de $T\mathcal{F}$.*

Dém. : En utilisant (7.4) et le fait que $(\phi_F) \circ \phi_{\tilde{F}}^{-1}(z, v) = (z, \frac{\partial \theta_2}{\partial y} v)$, on vérifie immédiatement que $\nabla_F = \nabla_{\tilde{F}}$.

De plus, si l'on introduit une trivialisatation $\psi : V_F \longrightarrow \mathbb{D} \times \mathbb{D}$, le même type de calculs qu'au paragraphe 7.2.2 (en utilisant cette fois $\beta = F^{-1} \circ \psi$ plutôt que θ), nous permet de lire les formes introduites au paragraphe 7.2.1 dans cette trivialisatation. On obtient ainsi :

$$\frac{i}{2} d\lambda_F(X, Y) = -\frac{\partial^2}{\partial y \partial \bar{x}} (\psi(z)) \overline{d\psi_1(X)} d\psi_2(Y).$$

Et l'on vérifie alors de façon directe que ∇_F se lit bien comme la connection canonique $\bar{\partial}$ dans la trivialisatation ψ , *i.e.* est la connection $(0, 1)$ canonique sur le fibré holomorphe $T\mathcal{F}$. ■

7.2.4 Tenseur invariant Γ

Notre précédente étude va nous permettre d'exhiber un invariant du feuilletage qui est nul si et seulement si les applications $F \in \mathcal{C}$ sont holomorphes et donc ssi il existe des applications holomorphes $F : \mathbb{D} \times \mathbb{C} \longrightarrow X$ compatibles avec le feuilletage (ce qui répond à notre question). Plus précisément je montre :

Définition-Théorème 7.2.1 Soit $\Gamma_F = \frac{i}{2}(dA_F)|_{TX \times T\mathcal{F}}$:

$$\Gamma_F : \begin{cases} TX \times T\mathcal{F} & \longrightarrow \mathbb{C} \\ (X, Y) & \longrightarrow \frac{i}{2} dA_F(X, Y) \end{cases}$$

Il ne dépend pas de F . On peut donc définir $\Gamma = \Gamma_F$. C'est une $(1, 1)$ -forme sur X qui est un invariant du feuilletage et qui s'annule ssi les applications F sont holomorphes. Plus précisément, pour toute $F \in \mathcal{C}$, Γ s'annule sur $F(\mathbb{D} \times \mathbb{C})$ si et seulement F est holomorphe.

De plus, Γ peut être également vue comme une section holomorphe le long des feuilles du fibré holomorphe $E = \Lambda^{(0,1)} T\mathcal{N} \otimes \Lambda^{(1,0)} T\mathcal{F}$ au-dessus de (X, \mathcal{F}) .

Dém. : Nous avons vu que A_F pouvait être considérée comme une 1-forme à valeurs dans \mathbb{C} . Aussi dA_F est une 2-forme. Si on la restreint à $TX \times T\mathcal{F}$, en différentiant (7.4), on constate que Γ_F est indépendant de F . On définit donc bien ainsi une forme différentielle appartenant à $\Lambda^1 TX \otimes \Lambda^1 T\mathcal{F}$. D'après les résultats obtenus sur A_F , Γ est une $(1, 1)$ -forme qui est nulle sur $F(\mathbb{D} \times \mathbb{C})$ si $F \in \mathcal{C}$ est holomorphe.

Réciproquement si $\Gamma = 0$, alors vu l'expression de A_F en fonction de ω , on en déduit que $\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = 0$ et donc, ω étant holomorphe le long des feuilles, que $\frac{\partial \omega}{\partial y}$ est constant sur chaque feuille. Comme nous avons vu qu'il était nul sur $\mathbb{D} \times \{0\}$, il est donc identiquement nul. On en déduit donc que ω est identiquement nul.

Finalement les F sont holomorphes si et seulement si $\Gamma = 0$.

De plus Γ s'annule sur $T\mathcal{F} \times T\mathcal{F}$ et peut donc être considéré comme une forme sur $T\mathcal{N} \times T\mathcal{F}$. Plus précisément, elle s'écrit localement comme :

$$\Gamma(X, Y) = -\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} (F^{-1}(z)) d(F^{-1})_2(Y) \overline{d(F^{-1})_1(X)}. \quad (7.6)$$

Il s'ensuit qu'elle est J -antilinéaire par rapport à la première variable et J -linéaire par rapport à la seconde. Γ est donc une section du fibré holomorphe au-dessus (X, \mathcal{F}) $E = \Lambda^{(0,1)}TN \otimes \Lambda^{(1,0)}T\mathcal{F}$, où l'on note $T\mathcal{N}$ le fibré normal à $T\mathcal{F}$ dans TX .

D'après l'expression (7.6) on constate que Γ est une section holomorphe le long des feuilles. ■

Notre étude sur l'existence d'applications holomorphes $F : \mathbb{D} \times \mathbb{C} \rightarrow X$ qui soient compatibles avec le feuilletage peut donc se réduire à une étude sur l'existence de sections du fibré E au-dessus de \mathcal{F} qui soient holomorphes le long des feuilles.

Rappelons que dans le cas où X est une variété de Stein, il a été prouvé que toutes les applications $F \in \mathcal{C}$ sont holomorphes (i.e $\Gamma = 0$).

Notre étude va me permettre de montrer que, dans le cas des feuilletages où toutes les feuilles sont compactes aussi, toutes les applications F sont holomorphes.

7.2.5 Cas de dimension supérieure

Notons que cette étude se généralise immédiatement au cas de variétés de dimension supérieure. Si X est une variété de dimension complexe n feuilletée par des feuilles paraboliques (de dimension 1). Alors si on considère une application F comme précédemment et $\Omega = F^*J$ cette forme s'écrit :

$$\Omega_{(x,y)} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_{(x,y)}(v_x) \end{pmatrix}.$$

où pour tout $(x, y) \in \mathbb{D}^{n-1} \times \mathbb{C}$, $\omega_{(x,y)}$ est une 1-forme antilinéaire sur \mathbb{C}^{n-1} .

Si on considère deux fonctions F et \tilde{F} on peut construire de nouveau $\theta : (x, y) \in \mathbb{D}^{n-1} \times \mathbb{C} \rightarrow (\theta_1(x), \theta_2(x, y)) \in \mathbb{D}^{n-1} \times \mathbb{C}$, la fonction de passage. On montre alors que :

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial y} \tilde{\omega}(x, y) = \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial x} \right)^* \omega(\theta(x, y)) + 2i \frac{\partial \theta_2}{\partial \bar{x}}.$$

où $\left(\frac{\partial \theta_1}{\partial x} \right)^*$ est un homomorphisme linéaire de \mathbb{C}^{n-1} et où l'on désigne par $*$ son conjugué (matriciellement la transposée de la conjuguée).

On peut ensuite définir les mêmes invariants et le théorème 7.2.1 reste valable.

7.2.6 Cas d'un feuilletage dont toutes les feuilles sont compactes

Proposition 7.2.3 *Si le long d'un disque holomorphe transverse D toutes les feuilles passant par D sont compactes, alors toutes les applications $F \in \mathcal{C}$ construites le long de ce disque sont holomorphes.*

En d'autres termes, l'invariant Γ associé au feuilletage est nul sur l'union des feuilles passant par D .

Dém. : Si l'on construit une application $F \in \mathcal{C}$, quitte à modifier la projection $\psi_x : \widetilde{L}_x \simeq \mathbb{C} \rightarrow L_x$, on peut supposer que pour tout $x \in \mathbb{D}$, $t_x = 1$ dans \widetilde{L}_x . Alors, pour tout $(x, y) \in \mathbb{D} \times \mathbb{C}$, (avec les notation de la partie 7.1.1 $F_x = \psi_x \circ F_x^0$) $F_x^0(y) = y \in \widetilde{L}_x$. De plus L_x peut être écrite comme \mathbb{C}/Γ_x où $\Gamma_x = \gamma_1(x)\mathbb{Z} \oplus \gamma_2(x)\mathbb{Z}$ est son groupe fondamental.

Fixons un ouvert U contenant D pouvant être trivialisé holomorphiquement par une application $\psi : U \rightarrow \mathbb{D} \times \mathbb{D}$ telle que $\psi(D) = \mathbb{D} \times \{0\}$ et qui envoie pour chaque $x \in D$ L_x sur $\psi(x) \times \mathbb{D}$. On peut alors définir $\pi_0 : U \rightarrow D$ par $\psi(\pi_0(z)) = \pi_1(\psi(z))$ avec $\pi_1(x, y) = x$ la projection holomorphe canonique.

Notons $x_0 = F(0, 0)$. Pour tout $\gamma \in \Gamma_0 = \Gamma_{x_0}$, $F(0, \gamma) = x_0$. Ainsi pour tout $x \in D$ suffisamment proche de x_0 , $F(x, \gamma) \in U$; et il existe donc un unique $\alpha_\gamma(x) \in \mathbb{D}$ tel que $F(\alpha_\gamma(x), 0) = \pi_0(F(x, \gamma))$. α_γ est l'application de premier retour associé à γ . L'analyse de l'Appendice montre que α_γ est holomorphe.

Montrons dans un premier temps :

Lemme 7.2.1 *Il existe un disque $D_0 \subset D$ et $N \geq 1$ tel que α_γ est bien définie sur D_0 et à valeurs dans D_0 et tel que $\alpha_\gamma^N = Id$ sur D_0 .*

Dém. : On remarque tout d'abord que comme L_{x_0} est compacte on peut restreindre D à $D' \subset D$ de sorte que $L_{x_0} \cap D' = \{x_0\}$. Alors, pour un petit voisinage quelconque V de x_0 dans D' , on considère les ensembles $U_0 = \cup_{x \in V} L_x$ et $V_0 = U_0 \cap D'$. Par compacité des feuilles $\cup_{x \in V} L_x$ est compact.

De plus, si l'on choisit V suffisamment petit. V_0 est alors inclus strictement dans D' et l'on peut même choisir $\epsilon > 0$ tel que $B(V_0, \epsilon) \subset D'$. En effet, sinon, on pourrait trouver une suite $x_n \rightarrow x_0$ telle qu'il existe $z_n \in L_{x_n} \cap D'$ avec $z_n \rightarrow \partial D'$; en utilisant la compacité des feuilles, on pourrait alors extraire une sous-suite convergente et l'on obtiendrait $z_0 \in L_{x_0} \cap \partial D'$ et l'on aboutirait donc à une contradiction.

Notons qu'alors V_0 est connexe. Alors si on note $D_0 = V_0$ on peut définir $\alpha_\gamma : D_0 \rightarrow D_0$. Et on remarque que α est un biholomorphisme de D_0 dont l'inverse est $\alpha_{-\gamma}$.

Alors, pour tout $x \in D_0$, $\{\alpha_\gamma^n(x), n \in \mathbb{N}\}$ est inclus dans $L_x \cap \mathbb{D}_0$. L_x étant compact, il s'agit d'un ensemble compact, discret; il est donc fini. Il existe donc $N \geq 1$ tel que $\alpha_\gamma^{N^*}(x) = x$. Ainsi,

$$D_0 = \cup_{n \geq 1} \{x \in D_0 \text{ such that } \alpha_\gamma^n(x) = x\}.$$

Chacun des ensembles composant cette union étant fermé, l'un d'entre eux est nécessairement d'intérieur non vide. Il existe donc un N tel que $\alpha_\gamma^N(x) = x$ sur un ouvert $V \subset D_0$. Comme, α_γ^N est holomorphe, on peut en conclure que $\alpha_\gamma^N = Id$ sur D_0 . ■

Cela étant prouvé, on peut fixer un N tel que pour $i = 1, 2$, $\alpha_{\gamma_i}^N = Id$ sur D (quitte à se restreindre dans un premier temps à des disques plus petits) et $\pi_0(F(x, N\gamma_i)) = F(x, 0)$ sur D . Les fonctions $N\gamma_i(x_0)$ peuvent donc être prolongées sur D par une application $\beta_i(x) \in \Gamma_x$. Soit Γ'_x le sous-groupe de Γ_x engendré par les $\beta_i(x)$.

Les fonctions $F_x = F(x, \cdot)$ sont alors Γ'_x -périodique pour $x \in D$.

Remarquons dans un premier temps que ω mesure le défaut d'holomorphie de l'application $x \rightarrow \Gamma'_x$. En effet, si l'on fixe un chemin quelconque $\gamma(x) = j\beta_1(x) + k\beta_2(x) \in \Gamma'_x$, $x \in D \simeq \mathbb{D}$,

alors $x \rightarrow F(x, \gamma(x)) = F(x, 0) \in L_x$ est J -holomorphe. Ainsi, $x \rightarrow (x, \gamma_x)$ est J' -holomorphe, ce qui se lit

$$-2i \frac{\partial \gamma}{\partial \bar{x}} = \omega(x, \gamma(x)). \quad (7.7)$$

Plus généralement, pour n'importe quelle famille continue par rapport à x $\gamma(x) \in \Gamma'_x$, et pour tout $(x, y) \in \mathbb{D} \times \mathbb{C}$, $F(x, y + \gamma(x)) = F(x, y)$. D'où

$$\omega(x, y + \gamma(x)) = \omega(x, y) - 2i \frac{\partial \gamma}{\partial \bar{x}}$$

On peut vérifier cela soit en dérivant l'égalité $F(x, y + \gamma(x)) = F(x, y)$ et en appliquant J , soit en appliquant les résultats de la partie 7.2.2 à l'application $F(x, y) = F(x, y + \gamma(x))$ qui appartient bien à \mathcal{C} et pour laquelle $\theta(x, y) = (x, y + \gamma(x))$.

Cela implique alors $\frac{\partial \omega}{\partial y}(x, \gamma(x)) = \frac{\partial \omega}{\partial y}(x, y)$. Ainsi pour n'importe quel x , la fonction $\frac{\partial \omega}{\partial y}(x, \cdot)$ est holomorphe sur \mathbb{C} et Γ'_x -périodique. Elle est donc constante, et donc nécessairement nulle car nulle en zéro. ■

Notons qu'à travers cette preuve on a également démontré que les groupes Γ'_x dépendaient holomorphiquement de $x \in D$ i.e. de la transversale. Plus précisément, vu (7.7) et le résultat de cette proposition :

Lemme 7.2.2 *Si X est une variété feuilletée holomorphiquement telle que le long d'un disque transverse D toutes les feuilles soient compactes. Alors si Γ_x dénote le groupe fondamental de L_x pour tout $x \in D$, toute famille continue $\gamma(x) \subset \Gamma_x$, $x \in D$ dépend en fait holomorphiquement de x .*

Cependant, dans le cas général, l'invariant Γ n'est pas trivial : il existe des variétés feuilletées holomorphiquement dont l'invariant Γ est non nul, et donc qui n'admettent pas de fonctions holomorphes $F : \mathbb{D} \times \mathbb{C} \rightarrow X$ compatible avec le feuilletage. Considérons l'exemple suivant ¹ :

7.3 Un exemple avec $\omega \neq 0$

Considérons une fonction non-holomorphe $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{P}^1 \mathbb{C}$; notons γ son graphe et considérons la variété $X = (\mathbb{D} \times \mathbb{P}^1 \mathbb{C}) \setminus \gamma$. Elle est naturellement munie d'une structure complexe restriction de la structure complexe canonique de $\mathbb{D} \times \mathbb{P}^1 \mathbb{C}$ et elle est holomorphiquement feuilletée par les feuilles $L_x = \mathbb{P}^1 \mathbb{C} \setminus \{f(x)\}$.

Soit $F : \mathbb{D} \times \mathbb{C} \rightarrow X$ une application de \mathcal{C} construite à partir d'un disque holomorphe transverse $D_0 \subset \mathbb{D} \times \{0\}$ et de la trivialisatation du fibré $T\mathcal{F}$ le long de D_0 , $t_x = 1 \in \mathbb{C} \simeq T\mathbb{P}^1 \mathbb{C}$.

Nous supposons par exemple que $f \neq 0$ et $f \neq \infty$ sur D_0 alors F se lit :

$$F : \begin{cases} D_0 \times \mathbb{C} & \rightarrow \cup_{x \in D_0} L_x \\ (x, y) & \rightarrow \left(x, \frac{f(x)y}{y+f(x)}\right) \end{cases} \quad (7.8)$$

Il s'ensuit :

$$dF_{(x,y)} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ \frac{f(x)^2}{(y+f(x))^2} v_y + \frac{y^2}{(y+f(x))^2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x) v_x + \frac{\partial f}{\partial \bar{x}}(x) \bar{v}_x \right) \end{pmatrix} \quad (7.9)$$

¹d'après des suggestions de Alexei Glutsyuk et Etienne Ghys

On vérifie alors de façon immédiate que $w(x, y) = 2i \frac{y^2}{f(x)^2} \frac{\partial f}{\partial \bar{x}}(x)$ et donc est non nul vu que f n'est pas holomorphe.

Par un calcul direct, on vérifie que en $(x, y) = (x, F_x(y_0))$, pour $X = (x_1, x_2) \in TX \simeq \mathbb{C}^2$ et $Y \in T\mathcal{F} \simeq \mathbb{C}$,

$$\Gamma(X, Y) = \frac{-2i}{(f(x) - y)^2} \frac{\partial f}{\partial \bar{x}}(x) Y \bar{x}_1,$$

et est donc non nul.

De plus, on peut remarquer que cela est d'une certaine façon l'exemple "le plus simple". En effet, ω est ici un polynôme de degré 2 en y ce qui peut être vu comme l'exemple le plus simple d'une fonction holomorphe en y nulle et de dérivée nulle en 0.

Appendice

Considérons D un disque transverse holomorphe fixé. Et soit $U_D = \cup_{x \in D} L_x$. On montre alors :

Lemme .0.1 *Il existe une application holomorphe π_0 sur U_D telle que :*

$$\pi_0 : \begin{cases} U_D & \longrightarrow D \\ z & \longrightarrow z' \text{ tel que } L_z = L_{z'} \end{cases}$$

Dans le cas où $U_D = F(\mathbb{D} \times \mathbb{C})$ (avec $D = F(\mathbb{D} \times \{0\})$), on peut de plus demander à ce que $\pi_0(F(x, y)) = F(x, 0)$ pour tout $x \in \mathbb{D}$.

Dém. : Afin de définir π_0 , on se fixe dans un premier temps une trivialisation holomorphe d'un ouvert U contenant D : $\psi : U \longrightarrow \mathbb{D} \times \mathbb{D}$ (comme d'habitude telle que $\psi(D) = \mathbb{D} \times \{0\}$ et telle que, pour tout $x \in D$, ψ envoie L_x sur $\psi(x) \times \mathbb{D}$). On peut alors définir π_0 sur U par : $\psi(\pi_0(z)) = \pi_1(\psi(z))$ avec $\pi_1(x, y) = x$ la projection holomorphe canonique sur la première coordonnée.

Pour ensuite définir π_0 sur U_D entier, on relit chaque point z à D par une chaîne finie d'ouverts U_j qui puissent être trivialisés holomorphiquement comme ci-dessus avec pour base un disque transverse holomorphe $D_j \subset U_{j-1} \cap U_j$. On définit alors π_0 comme la composition des projections p_j sur D_j définies sur chaque U_j .

Dans le cas particulier où $U_D = F(\mathbb{D} \times \mathbb{C})$ (avec $D = F(\mathbb{D} \times \{0\})$) on choisit une chaîne d'ouverts images d'une chaîne d'ouverts de $\mathbb{D} \times \mathbb{C}$.

Alors par construction, si $L_{\pi_0(z)} = L_z$, et dans le cas où $U_D = F(\mathbb{D} \times \mathbb{C})$ $\pi_0(F(x, y)) = F(x, 0)$. Il ne reste donc à vérifier que l'holomorphie de π_0 . Il suffit pour cela de vérifier l'holomorphie des projections p_j (on le montre pour la projection sur D définie sur U le cas des autres p_j étant identique). Considérons donc l'ouvert U et la trivialisation ψ définie précédemment. Mais sur U , l'application π_0 vérifie : $\pi_0(z) = \psi^{-1}(\pi_1(\psi(z)))$ et est donc holomorphe. ■

On déduit immédiatement de ce lemme l'holomorphie de l'application θ_1 définie définition 7.1.2.

On peut de plus en déduire que la structure complexe $J' = F^*J$ coïncide avec J_0 sur le quotient \mathbb{D} . En effet, $\pi_0(F(x, y)) = F(x, 0)$ et donc $d(\pi_0)_{F(x, y)}(dF_{(x, y)}(v, 0)) = dF_{(x, 0)}(v, 0)$. Comme

π_0 est holomorphe, $d(\pi_0)_{F(x,y)}(JY) = Jd(\pi_0)_{F(x,y)}(Y)$. On obtient donc $d(\pi_0)_{F(x,y)}(JdF_{(x,y)}(v, 0)) = JdF_{(x,0)}(v, 0)$, qui est égal à $dF_{(x,0)}(J_0v, 0)$ vu que F est holomorphe le long de $\mathbb{D} \times \{0\}$.
 Finalement, $d(\pi_0)_{F(x,y)}(JdF_{(x,y)}(v, 0)) = d(\pi_0)_{F(x,y)}(dF_{(x,y)}(J_0v, 0))$ et comme $\text{Ker}(d\pi_0) = T\mathcal{F}$, on montre bien que J' et J_0 coïncide sur le quotient \mathbb{D} .

Quatrième partie

Conclusion et ouvertures

Dans le chapitre 2 de cette thèse, j'ai introduit et étudié la notion de symplectique hyperbolicité, cette notion provenant de la comparaison de la cohomologie de Floer d'une variété compacte à bord avec sa cohomologie usuelle (modulo son bord). Ainsi si une variété est non symplectique hyperbolique, la cohomologie de Floer transporte des informations symplectiques (non purement topologiques), et en particulier, la non-hyperbolicité symplectique correspond à une version algébrique de la conjecture de Weinstein. L'hyperbolicité symplectique s'insère donc naturellement dans le cadre de l'étude de la cohomologie de Floer (qui est l'objet de nombreuses recherches actuelles, notamment reliées à des questions de mathématiques-physiques) et de la conjecture de Weinstein. Afin de mieux comprendre cette notion, ainsi que les questions auxquelles elle est reliée, j'ai étudié une capacité symplectique mesurant la non-hyperbolicité de la variété (infinie si et seulement si la variété est symplectique hyperbolique), obtenant notamment une estimation de sa croissance pour les domaines d'une variété de Stein. Cette capacité m'a permis de généraliser cette notion d'hyperbolicité symplectique pour toutes les variétés ω -convexes. Toujours afin de mieux comprendre ce cadre symplectique, j'ai alors comparé cette notion à celle de Polterovich-hyperbolicité, j'ai étudié son comportement vis-à-vis des variétés produits (montrant que la non-hyperbolicité symplectique était une propriété stable par produit avec n'importe quelle autre variété ω -convexe), et j'ai regardé comment elle s'insérait dans le cadre de la géométrie riemannienne (prouvant que pour des variétés à bouts coniques, la non-hyperbolicité symplectique correspondait à une notion de courbure pas trop positive).

L'objectif principal de ma thèse était de comparer cette notion d'hyperbolicité symplectique et la notion d'hyperbolicité pseudo-complexe, et ce afin d'obtenir une nouvelle approche et obtenir de nouveaux résultats, à la fois en géométrie symplectique et plus particulièrement sur l'homologie de Floer, et sur l'hyperbolicité complexe (à travers cette nouvelle approche que constitue en elle-même l'hyperbolicité pseudo-complexe).

J'ai dans un premier temps au chapitre 3 effectué quelques rappels sur l'hyperbolicité pseudo-complexe, généralisation immédiate des notions d'hyperbolicités complexes au cadre presque-complexe. J'ai montré que surgissait naturellement une notion d'hyperbolicité pseudo-Kähler, équivalente à toutes les autres notions d'hyperbolicités complexes dans le cas compact, mais qui, contrairement aux autres, dépend non seulement de la structure pseudo-complexe mais aussi de la structure pseudo-Kähler de la variété. Cette notion apparaît comme le lien naturel entre l'hyperbolicité symplectique et pseudo-complexe. Elle est, par définition même, reliée aux autres notions d'hyperbolicité pseudo-complexes. Pour la relier à l'hyperbolicité symplectique, le lien naturel est les courbes pseudo-holomorphes. J'établis donc également dans ce chapitre des liens entre l'hyperbolicité pseudo-Kähler et l'existence de disques pseudo-holomorphes, et ce grâce notamment à un invariant provenant de la théorie de Nevanlinna. Ces résultats interviennent d'ores et déjà de façon fondamentale dans l'étude de ma thèse mais ils s'avèreront probablement également utiles dans le cadre de prochains travaux (notamment sur l'étude des courbes pseudo-holomorphes et l'hyperbolicité).

Le chapitre 4 utilise les résultats des chapitres précédents pour faire le lien entre l'hyperbolicité symplectique et pseudo-complexe. Je commence par prouver un résultat faisant le lien entre l'hyperbolicité symplectique et l'existence de disques pseudo-holomorphes : si une variété compacte à bord ω -convexe est non symplectique hyperbolique alors, pour toute structure pseudo-complexe compatible préservant l' ω -convexité, il existe un disque pseudo-holomorphe dont le bord est in-

clus dans le bord de la variété et dont l'aire est inférieure à la capacité. Je peux alors en déduire que si une variété ω -convexe est (suffisamment) non symplectique hyperbolique, alors pour toute structure pseudo-complexe compatible respectant l' ω -convexité, la variété est non complexe hyperbolique (on montre en fait d'abord qu'elle est non pseudo-Kähler hyperbolique puis dans de nombreux cas on peut en déduire qu'elle est non complexe hyperbolique pour une des notions usuelles). Du côté pseudo-complexe on peut en déduire la non-hyperbolicité complexe de nombreuses variétés. Du côté symplectique, ce résultat se lit par contraposée : si, pour une structure pseudo-complexe compatible, une variété est pseudo-Kähler hyperbolique (ou simplement complexe hyperbolique dans le cas compact), alors la variété est symplectique hyperbolique : on obtient une minoration de la croissance de la capacité des suites croissantes exhaustives de domaines compacts J -convexes de la variété.

Dans le chapitre 5, j'approfondis cette étude en montrant que, en se restreignant à une certaines classes de variétés ω -convexes (variétés satisfaisant certaines hypothèses de géométrie bornée), on peut supprimer la condition demandant que la structure pseudo-complexe préserve l' ω -convexité. Pour cela j'établis tout d'abord un certain nombre de lemmes isopérimétriques nécessaires à cette étude (mais qui pourront être plus tard utilisés dans d'autres cadres). Ils me permettent alors de montrer que si une variété "à géométrie bien bornée" est suffisamment non symplectique hyperbolique, alors pour toute structure pseudo-complexe uniformément compatible (le uniformément étant automatique dans le cas compact) la variété est non pseudo-Kähler hyperbolique (et donc non complexe hyperbolique sous des hypothèses de compacité). On généralise ainsi le résultat de Bangert qui l'énonçait dans le cas particulier du tore. Avec des hypothèses plus faibles sur la non-hyperbolicité symplectique, on obtient tout de même la non-hyperbolicité complexe pour toute structure pseudo-complexe compatible dans un voisinage C^1 de la structure complexe standard. Ce résultat s'avère très intéressant pour l'étude de l'hyperbolicité complexe, car, non seulement il permet de prouver la non-hyperbolicité (pseudo-)complexe de ces variétés (non-symplectique-hyperboliques à géométrie bien bornée) pour n'importe quelle structure pseudo-complexe compatible, mais de plus, il prouve ainsi la stabilité de la non-hyperbolicité complexe, dans l'ensemble des structures pseudo-complexes compatibles à la structure symplectique fixée. Cette propriété est particulièrement significative, car habituellement la non-hyperbolicité est une propriété fermée. Cela met en avant le caractère particulier du sous-ensemble des structures pseudo-complexes composé de celles compatibles à une structure symplectique non-symplectique-hyperbolique fixée.

J'ai donc tissé un réseau de liens entre l'hyperbolicité symplectique et l'hyperbolicité pseudo-complexe qui viennent compléter le réseau de liens déjà existant entre les propriétés symplectiques et pseudo-complexes d'une variété munie de deux structures compatibles. J'en ai d'ores et déjà déduit un certains nombres de résultats intéressants dans ces deux domaines, mais cela peut encore être plus largement exploité.

L'étude d'une réciproque partielle (des contre-exemples montrent que l'on ne peut espérer de réciproque sans aucune restriction) de nos résultats ("non-hyperbolicité symplectique implique non-hyperbolicité complexe") devrait permettre de mieux comprendre la cohomologie de Floer. J'ai par exemple d'ores et déjà montré que, dans le cas de variétés coniques "semi-symplectisées" (union d'une variété compacte à bord de type contact avec la semi-symplectisation du bord), l'existence de courbes pseudo-holomorphes entières d'énergie bornée (les courbes entières obtenues grâce à nos résultats sont dans ce cadre toutes d'énergie bornée) impliquait l'existence d'orbites de Reeb. Mais une étude plus approfondie devrait permettre d'obtenir de plus amples informations notamment sur la structure de la cohomologie de Floer.

Cette étude (a d'ores et déjà fait et) devrait faire intervenir des outils de géométrie pseudo-complexe tels la théorie de Nevanlinna (qui ont déjà été utilisés dans cette thèse) ainsi que des techniques semblables à celles utilisées dans le cadre de la "Symplectic Field theory" [10]. Notons qu'il serait intéressant également de faire le lien entre notre étude et ce contexte. Plus précisément, cette théorie introduit une cohomologie de contact, et j'aimerais donc maintenant voir comment mes résultats peuvent se lire dans ce cadre (des variétés de contact, pendant en dimension impaire des variétés symplectiques). Cela demande notamment de comprendre comment peut se définir l'hyperbolicité et quel est la traduction de nos résultats dans ce contexte.

De surcroît, nous avons prouvé dans le cas de variétés non symplectique hyperboliques (compactes ou vérifiant des hypothèses de compacité) l'existence de courbes entières pseudo-holomorphes et avons étudié la stabilité de leur existence par déformation de la structure pseudo-complexe. Ce résultat est particulièrement intéressant dans le cas de variétés asphériques (n'admettant pas de sphères pseudo-holomorphes) et soulève dans ce cas la question d'un invariant symplectique, analogue à l'invariant de Gromov-Witten qui prendrait en compte les plans pseudo-holomorphes plutôt que les sphères.

Ce résultat soulève une autre question : on montre l'existence d'un plan pseudo-holomorphe mais peut-on montrer l'existence d'un tel plan à travers chaque point ? Il serait alors intéressant de voir si on peut ainsi obtenir une structure feuilletée de la variété par ces plans. Dans ce cas-là, si la structure est intégrable : plusieurs questions surgissent naturellement : le feuilletage obtenu est-il holomorphe ? Si oui, existe-il une application holomorphe $F : \mathbb{D}^{n-1} \times \mathbb{C} \rightarrow M$ holomorphe le long du feuilletage ? Et même, (inspirée de la question soulevée par K. Cieliebak dans [7] : "les variétés de Stein sous-critiques sont-elles biholomorphes à des variétés "split"), dans quel cas M est-elle biholomorphe à des variétés "split" (qui s'écrivent en tant que variété complexe comme $\mathbb{C} \times N$).

La dernière partie de ma thèse a été une première étape vers la compréhension de ces questions puisqu'elle étudie le problème : si on a un feuilletage holomorphe, existe-il une application holomorphe $F : \mathbb{D} \times \mathbb{C} \rightarrow M$ holomorphe le long du feuilletage. Cette étude répond à cette question en termes d'existence d'une section holomorphe le long des feuilles d'un fibré en droite au-dessus de feuilletage. Il s'agit d'un premier pas vers la compréhension de l'étude de l'hyperbolicité des feuilletages. Je souhaiterais maintenant adopter une approche plus symplectique et définir, suivant des idées développées par Connes [8], une cohomologie de Floer feuilletée et tenter de reproduire le travail de ma thèse dans ce cadre, et ce afin d'approfondir cette analyse.

Bibliographie

- [1] B. Aebischer, etc, *Symplectic Geometry, An introduction based on the Seminar in Bern, 1992*, Progress in Mathematics **124**, Birkäuser Verlag (1994).
- [2] M. Audin, J. Lafontaine, *Holomorphic curves in symplectic geometry*, Progress in Mathematics **117**, Birkäuser Verlag (1994).
- [3] V. Bangert, *Existence of a complex line in tame almost complex tori*, Duke Math. J., **94** (1998).
- [4] P. Biran, K. Cieliebak, *Symplectic Topology on Subcritical Manifolds*, Commentarii Mathematici Helvetici, **76** (2002).
- [5] P. Biran, L. Polterovich, D. Salamon, *Propagation in hamiltonian dynamics and relative symplectic homology*, arXiv :math.SG/0108134 (2001) (à paraître dans Duke Math. J.).
- [6] K. Cieliebak, A. Floer, H. Hofer, *Symplectic homology II*, Mathematische Zeitschrift, **223** (1996).
- [7] K. Cieliebak, *Subcritical Stein manifolds are split*, arXiv :math.DG/0204351 (2002).
- [8] A. Connes, *Non commutative geometry*, Academic Press (1994).
- [9] J-P Demailly, *Variétés hyperboliques et équations différentielles algébriques*, Gazette des mathématiciens, (1997).
- [10] Y. Eliashberg, A. Givental, H. Hofer, *Introduction to Symplectic Field Theory*, arXiv :math.SG/0010059 (2000).
- [11] Y. Eliashberg, M. Gromov, *Convex symplectic manifolds, Several complex variables and complex geometry, Part 2 (Santa Cruz, CA, 1989)*, Proc. Sympos. Pure Math. **52**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1991).
- [12] H. Federer, *Geometric Measure Theory*, Springer-Verlag, 1969.
- [13] A. Floer, *Symplectic fixed points and holomorphic spheres*, Comm. Pure Appl. Math, **41** (1988).
- [14] A. Floer, *Witten's complex and infinite dimensional Morse theory*, J. Diff. Geom., **30** (1989).
- [15] *The Floer memorial volume*, Progress in Mathematics **133**, Birkäuser Verlag (1995).
- [16] A. Floer, H. Hofer, *Symplectic homology I (open sets in \mathbb{C}^n)*, Mathematische Zeitschrift, **215** (1994).
- [17] A. Floer, H. Hofer, K. Wysocki, *Applications of symplectic homology I* Mathematische Zeitschrift, **217** (1994).
- [18] H. Gaussier, A. Sukhov, *Estimates of the Kobayashi metric on almost complex manifolds*, arXiv :math.CV/0307334 (2003).

- [19] E. Ghys, *Dynamique et géométrie complexes*, Panoramas et Synthèses **8** (1997).
- [20] R.E. Greene, H. Wu, *Function theory on manifolds which possess a pole*, Lecture Notes in Mathematics **699**, Springer, Berlin (1979).
- [21] M. Gromov, *Pseudoholomorphic curves in symplectic manifolds*, Invent. Math. **82** (1985).
- [22] M. Gromov, *Kähler hyperbolicity and L_2 -Hodge theory*, J. Differential Geom. **33** (1999).
- [23] M. Gromov, *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*, Cedric-Nathan (1981)
M. Gromov, *Metric structures for riemannian and non-riemannian spaces*, Progress in Mathematics **152**, Birkäuser Verlag (1999)
- [24] D. Hermann, *Homologie symplectique et épaisseur de Gromov d'un ouvert de type contact restreint*, Thèse de Doctorat en Sciences, Université Paris XI Orsay (1998).
- [25] D. Hermann, *Holomorphic curves and hamiltonian systems in an open set with restricted contact type boundary*, Duke Math. J. **103** (2000).
- [26] H. Hofer, E. Zehnder, *Symplectic invariants and Hamiltonian dynamics*, Birkhäuser Advanced Texts, Birkäuser Verlag (1994).
- [27] C. Hummel, *Gromov's compactness theorem for pseudo-holomorphic curves*, Progress in Mathematics **151**, Birkäuser Verlag (1997).
- [28] S. Kobayashi, *Hyperbolic complex spaces*, Springer Verlag **318** (1998).
- [29] S. Lang, *Introduction to complex hyperbolic spaces*, Springer-Verlag (1987).
- [30] S. Lang, *topics in Nevanlinna theory*, Lecture Notes in Mathematics **1433**, Springer, Berlin (1979).
- [31] D. McDuff, *Symplectic manifolds with contact type boundaries*, Inventiones Mathematicae, **103**, 1991.
- [32] D. McDuff, D. Salamon, *J-holomorphic curves and quantum cohomology*, American Mathematical Society, University Lecture Series **6** (1994).
- [33] F. Morgan, *Geometric measure theory*, Academic Press.
- [34] A. Oancea, *La suite spectrale de Leray-Serre en cohomologie de Floer pour variétés symplectiques compactes à bord de type contact*, Thèse de Doctorat en Sciences, Université Paris XI Orsay (2003).
- [35] L. Polterovich, *Growth of maps, distortion in groups and symplectic geometry*, preprint, arXiv :math.DS/011105050 (2001).
- [36] J. Robbin, D. Salamon, *The Maslov index for paths*, Topology **32** (1993).
- [37] D. Salamon, *Lectures on Floer homology*, in Symplectic Geometry and Topology, Y. Eliashberg, L. Traynor eds, IAS/Park City Math. Series, **7**, AMS (1999).
- [38] D. Salamon, E. Zehnder, *Morse theory for periodic solutions of Hamiltonian systems and the Maslov index*, Com. Pure Appl. Math, **45** (1992).
- [39] C. Viterbo, *Functors and computations in Floer homology with applications, Part I*, Geom. Funct. Anal. **9** (1999).
- [40] A. Weinstein, *Lectures on symplectic manifolds*, American Mathematical Society, 1977, CBMS Lectures notes series **29**.

